MO601016 – Funktionalgleichungen (Teil I)

In der 1. Runde der 60. Mathematik-Olympiade (Schuljahr 2020/21) wurde folgende Aufgabe gestellt:

Aufgabe 01-01 (MO601016[1]). Max hat eine Rechenvorschrift festgelegt, durch die je zwei rationalen Zahlen x und y eine rationale Zahl z zugeordnet wird. Er schreibt dafür $z = x \# y$. (Die Zahl z wird also mit Hilfe einer Formel aus x und y berechnet.)

Anschließend stellt er fest, dass für beliebige rationale Zahlen a, b, c die Gleichung

$$a + (b \# c) = (a \# b) + (a \# c) \qquad (1)$$

gilt.

a) Geben Sie eine Rechenvorschrift für $x \# y$ an, die nur die vier Grundrechenarten +, −, ·, : als Rechenarten verwendet, sodass (1) erfüllt ist.
   Zeigen Sie, dass die Gleichung (1) für beliebige rationale Zahlen a, b, c durch diese Rechenvorschrift tatsächlich erfüllt wird.
b) Zeigen Sie: Wenn für beliebige rationale Zahlen a, b, c die Gleichung (1) gilt, dann gilt für die Rechenvorschrift von # die Formel aus a).

Statt des allgemeinen Symbols # hätte auch eine Funktion f verwendet werden können[2], die zwei rationalen Zahlen x und y einer rationalen Zahl z zuordnet. Dann sind alle Funktionen f mit $f(x,y) = z$ für rationale Zahlen x, y, z gesucht, die folgende Funktionalgleichung erfüllt:

$$a + f(b,c) = f(a,b) + f(a,c).$$

---

[1] In der Bezeichnung **MOjjkkra** wird für Aufgaben der Mathematik-Olympiade der Jahrgang **jj**, die Klassenstufe **kk**, die Runde **r** und die Aufgabennummer **a** angegeben.

[2] Mit der Umschreibung der Rechenvorschrift durch das Symbol # wird die Diskussion um mathematische Hintergründe zum Funktionsbegriff umgangen, der auch hier nicht dargestellt werden soll. Nur so viel: Für eine ***Funktion*** f folgt für alle Argumente ihres Definitionsbereiches (im Allgemeinen die rationalen oder reellen Zahlen) x, y_1 und y_2 mit $f(x) = y_1$ und $f(x) = y_2$ die Gleichheit $y_1 = y_2$. Wir nennen die Funktion reellwertig, wenn alle Funktionswerte der Funktion reelle Zahlen sind.
Weiter wollen wir unter einer ***Funktionalgleichung*** in den Funktionen $f_1, ..., f_k$ eine Gleichung verstehen, welche n unabhängige Veränderliche $x_1, ..., x_n$ $(n \geq 1)$ und k unbekannte Funktionen $f_1, ..., f_k$ $(k \geq 1)$ sowie eine endliche Zahl von bekannten Funktionen enthält. Dabei treten die n unabhängigen Veränderlichen $x_1, ..., x_n$ bzw. ein Teil von ihnen als Argumente der Funktionen auf.

Aufgaben in dieser Schreibweise mit Funktionalgleichungen sind in der MO-Geschichte bereits häufig aufgetreten. Eine Gruppe von Aufgaben beinhaltet die Ermittlung spezieller Funktionswerte. Ziel ist also, die Zusammenhänge aus den Gleichungen für geeignete Argumente auszunutzen. Mit der Formulierung „E sei f eine Funktion ...“ wird vorausgesetzt, dass eine solche Funktion überhaupt existiert, d.h., für die Funktion muss keine explizite Darstellung angegeben werden.

Aufgabe 01-02 (MO271042). Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und für alle reellen Zahlen x_1 und x_2 die folgenden Gleichungen (1) und (2) erfüllt:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1^3) + f(x_2^3) \qquad (1)$$
$$f(x_1 \cdot x_2) = x_1 \cdot f(x_2) + x_2 \cdot f(x_1) \qquad (2)$$

Beweisen Sie, dass durch diese Voraussetzungen der Funktionswert $f(2 + \sqrt{5})$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diesen Funktionswert!

Lösungshinweise: Aus (1) folgt für $x_1 = x_2 = 1$ die Gültigkeit von $f(1) = 0$. Wir setzen $a = \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{5})$. Dann finden wir

$$a^2 = \frac{1}{2} \cdot (3 + \sqrt{5}) = a + 1$$

und $$a^3 = \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{5}) \cdot \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) = \frac{1}{4} \cdot (3 + 4 \cdot \sqrt{5} + 5) = 2 + \sqrt{5}$$

Unter Anwendung der Voraussetzung können wir folgende Gleichungen bilden:

$$f(a^3) = f(a^3) + f(1^3) = f(a + 1) = f(a^2) = 2 \cdot a \cdot f(a)$$
$$f(a^3) = f(a^2 \cdot a) = a^2 \cdot f(a) + a \cdot f(a^2) = 3 \cdot a^2 \cdot f(a)$$

Wegen $a \neq 0$ erkennen wir $f(a) = 0$ und deshalb gilt: $f(a^3) = f(2 + \sqrt{5}) = 0$.
❑

In der folgenden Aufgabenstellung wird ausdrücklich offengelassen, ob eine Funktion mit diesen Eigenschaften existiert.

Aufgabe 01-03 (MO301044). Untersuchen Sie, ob es eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f so gibt, dass für alle natürlichen Zahlen a und b die Gleichung $f(a) + f(a + b) - f(a - b) = a^2 + 4b + 2$ gilt!

Gibt es eine Lösungsstrategie für solche Aufgaben? Angenommen, es gibt eine Lösung, dann muss eine gegebene Gleichung erst recht für spezielle Belegungen der Veränderlichen gelte. Es kann also hilfreich sein, durch geschickte Wahl der Argumente Eigenschaften der gesuchten Funktionen zu finden, die zur expliziten Form der Lösung führen (können). Wir betrachten folgendes Beispiel.

Aufgabe 01-04. Man finde alle Funktionen *f*, die für alle reellen Zahlen *x* und *y* definiert sind und folgende Funktionalgleichung erfüllen:

$$f(x+y)+2\cdot f(x-y)+f(x)+2\cdot f(y)=4\cdot x+y.$$

Lösungshinweise: Zunächst setze man $x = y = 0$. Dann reduziert sich die gegebene Gleichung zu $6\cdot f(0)=0$, also $f(0) = 0$.

Setzt man nun lediglich $y = 0$ und lässt *x* beliebig, so findet man $4\cdot f(x)=4\cdot x$, also $f(x) = x$ für alle reellen *x*. Die Probe bestätigt diese Funktion als Lösung. ❑

Erhält man durch spezielle Belegungen einen „Lösungskandidaten“, so erhalten wir zunächst nur notwendige Bedingungen für die Lösung einer Aufgabe. Damit die gefundene Darstellung auch hinreichend ist, müssen wir mittels Probe noch zeigen, dass die Funktionalgleichung tatsächlich für alle *x* und *y* des Definitionsbereiches erfüllt ist. Untersuchen wir dafür den Unterschied zwischen (a) und (b) der folgenden Aufgabe.

Aufgabe 01-05. Man finde alle Funktionen *f* mit

a) $f(x+y)+f(x-y)=x^2+2+y^2$
b) $f(x+y)+f(x-y)=x^2+2\cdot xy+y^2$

Lösungshinweise: Die Substitution $y = 0$ führt unmittelbar sowohl in Aufgabe (a) als auch in Aufgabe (b) für alle reellen Zahlen *x* zur Gleichung

$$f(x)=\frac{x^2+2}{2}.$$

In Aufgabe (a) bestätigt die Probe die Richtigkeit. Dagegen erfüllt diese Funktion nicht die Bedingung (b). Für die Substitution $x = y = 0$ erhalten wir $f(0) = 0$. Damit können wir für die Teilaufgabe (b) auf verschiedene Weise auch $f(2)$ ermitteln:

$x = 2; y = 0$: $2\cdot f(2) = f(2+0) + f(2-0) = 2^2 + 2\cdot 2\cdot 0 + 0^2 = 4$
also $f(2)=2$,

$x = y = 1$: $f(2) = f(1+1) + f(1-1) = 1^2 + 2\cdot 1\cdot 1 + 1^2 = 4$
also $f(2)=4$.

Dieser Widerspruch zeigt bereits, dass es keine Funktion *f* geben kann, die die Funktionalgleichung aus Teilaufgabe (b) erfüllt.

Natürlich führen solche einfachen Substitutionen nicht immer zum sofortigen Erfolg. Geringe Änderungen in der Funktionalgleichung können beträchtliche Wirkungen haben!

Aufgabe 01-06. Man finde alle reellwertigen Funktionen *f*, die für alle reellen Zahlen definiert sei und folgende Gleichung für alle reellen Zahlen *x* und *y* erfüllt:

$$f(x+y)-2\cdot f(x-y)+f(x)-2\cdot f(y)=y-2$$

Lösungshinweise: Setzt man $x = y = 0$, findet man $f(0) = 1$. Allerdings führt $y = 0$ und x beliebig ebenfalls „nur" zu $f(0) = 1$. Versucht man dagegen $x = 0$ und y beliebig, so erhält man

$$-2\cdot f(-y)-f(y)=y-3.$$

Noch immer treten zwei verschiedene Argumente auf! Ersetzt man nun y durch $-y$ (da die Gleichung ja für alle Zahlen gelten muss), so führt dies zu

$$-2\cdot f(y)-f(-y)=-y-3.$$

Damit ist ein Gleichungssystem mit den zwei Variablen $f(y)$ und $f(-y)$ gegeben, deren Lösung $f(y) = y + 3$ lautet. (Probe!) ❑

Versuchen wir nun die Substitutionsmethode zur Lösung der Gleichung (1) aus der **Aufgabe 01-01**:

$$a+f(b,c)=f(a,b)+f(a,c).$$

Aus $a = b = c = 0$ folgt $0 + f(0,0) = f(0,0) + f(0,0)$ und somit $f(0,0) = 0$.

Aus $a = b = c$, aber beliebig, folgt $a + f(a,a) = f(a,a) + f(a,a)$, also $f(a,a) = a$.

Aus $b = c$ finden wir für beliebiges a die Gleichung $a + f(b,b) = f(a,b) + f(a,b)$ und somit wegen $f(b,b) = b$ die Lösung

$$f(a,b)=\frac{a+b}{2}.$$

Wir müssen nun noch in einer Probe zeigen, dass diese Funktion die Rechenvorschrift für beliebige Argumente *a, b* und *c* erfüllt:

$$a+f(b,c)=a+\frac{b+c}{2}=\frac{a+b}{2}+\frac{a+c}{2}=f(a,b)+f(a,c).$$

❑

Literatur :

Sprengel, H.-J. ; Wilhelm, O. : Funktionen und Funktionalgleichungen (Mathematische Schülerbücherei Nr. 114). Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1984.

Sewerin, H.: Eine Pralinenschachtel mit versteckter Drehsymmetrie. In: Specht, E.; Quaisser, E; Bauermann, P.: 50 Jahre Bundeswettbewerb Mathematik – Die schönsten Aufgaben. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2020.