Thema 01: Funktionalgleichungen

Aufgabe 01-01a (MO301044).

Untersuchen Sie, ob es eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f so gibt, dass für alle natürlichen Zahlen a und b die folgende Gleichung gilt:

$$f(a) + f(a + b) - f(a - b) = a^2 + 4b + 2$$

Lösungsvariante 1: Finden Sie durch eine geeignete Substitution der Variablen a und b eine explizite Darstellung für die Funktion f und zeigen Sie in der Probe, dass diese notwendige Bedingung nicht für alle a und b gelten kann.

Lösungsvariante 2: Finden Sie verschiedene Werte für a und b, sodass die linken Seiten der Funktionalgleichungen gleich sind, sich die rechten Seiten aber unterscheiden.

Aufgabe 01-02a (MO471036).

Wir wollen im Folgenden untersuchen, ob es eine für alle reellen Zahlen definierte reellwertige Funktion f gibt, die für alle reellen Zahlen x ($x \neq -1; 0$) der folgenden Gleichung genügt:

$$\frac{1}{1+x} \cdot f\left(\frac{1+x}{x}\right) + f(1+x) = 1$$

a) Angenommen, es gibt eine solche Funktion. Bestimmen Sie $f(2)$.

b) Bestimmen Sie die Werte von $f(3)$ und $f(3/2)$.

Aufgabe 01-03a.

Finden Sie alle reellwertigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen definiert sind und für alle reellen Zahlen x und y die folgende Gleichung erfüllen:

$$f(x + y) - 2f(x - y) + f(x) = 6xy - y^2.$$

(vergleiche Aufgabe 01-06)

Aufgabe 01-04a.

Zeigen Sie: Erfüllt die Funktion f für alle rationalen Zahlen x und y die Cauchysche Funktionalgleichung

$$f(x + y) = f(x) + f(y);\ f(1) = 1$$

und gibt es eine irrationale Zahl z mit $f(z) \neq z$, so ist f keine monotone Funktion.

Aufgabe 01-05a.

Finden Sie alle monotonen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen definiert sind und die folgenden Funktionalgleichungen erfüllen:

(a) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$

(b) $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$

Lösungshinweise: Führen Sie durch geeignete Substitution die gegebenen Funktionalgleichungen auf die Cauchysche Funktionalgleichung zurück.