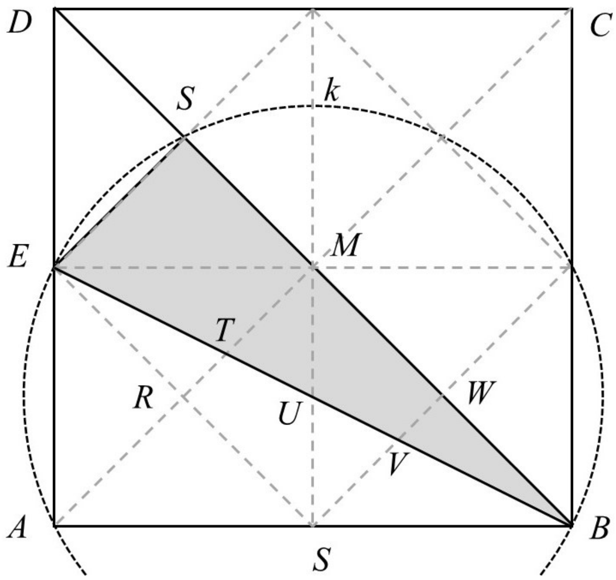
Thema 04: MO601023 – Flächenberechnung (II)

Vorbemerkungen: Anstelle der Bestimmung von Streckenlängen, die zur Berechnung des Flächeninhaltes benötigt werden, kann die Zerlegung der Grundfigur in kongruente Teilflächen zum Ergebnis allein durch Auszählen der betroffenen Teilflächen gelingen.

Aufgabe 5 - MO601023. Gegeben ist ein Quadrat *ABCD* mit der Seitenlänge 1. Es sei *E* der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AD}$. Die Strecke $\overline{BE}$ ist der Durchmesser eines Kreises *k*. Der Kreis *k* schneidet die Diagonale $\overline{BD}$ in *S*.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks *EBS*.

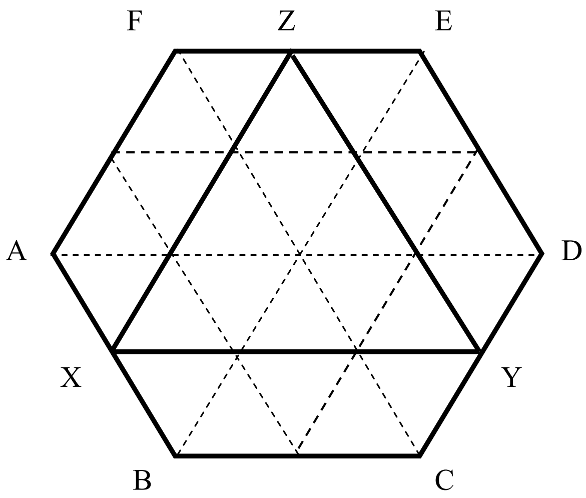
Lösungshinweise: Aufgrund der Konstruktionsvorschrift ist das Dreieck *EBS* nach dem Satz von THALES rechtwinklig mit dem rechten Winkel am Punkt *S*. Weiter gilt wegen $\sphericalangle DSE = 90°$ und $\sphericalangle EDS = 45°$ gemäß Innenwinkelsummensatzes gilt auch $\sphericalangle SED = 45°$. Das Dreieck *ESD* ist folglich gleichschenklig-rechtwinklig. So können wir das Quadrat *ABCD* mit 16 zum Dreieck *ESD* kongruenten Dreiecken vollständig und überschneidungsfrei überdecken.



Wir beschreiben nun die gesuchte (in der Abbildung grau hinterlegte) Fläche mittels dieser Teildreiecke. Offensichtlich stimmt der Flächeninhalt des Dreiecks *EMS* mit dem eines Überdeckungsdreiecks überein. Weiterhin ist das Dreieck *ERT* kongruent zum Dreieck *BWV*, denn sie stimmen in den Winkeln und in der Seite $|BW| = |ER|$ überein. Also gilt $A_{ETM} + A_{BWV} = A_{ETM} + A_{ERT} = A_{ERM}$ und damit stimmt auch dies mit dem Flächeninhalt eines solchen Überdeckungsdreiecks überein. Schließlich ist das Dreieck *MTU* kongruent zum Dreieck *SVU*, denn sie stimmen in den Winkeln und in der Seite $|SU| = |MU|$ überein. Also stimmt die Summe $A_{MTU} + A_{MUVW} = A_{SVU} + A_{MUVW} = A_{MSW}$ mit dem Flächeninhalt eines solchen Überdeckungsdreiecks überein. Somit entspricht der gesuchte Flächeninhalt genau dem Dreifachen des Flächeninhalts eines solchen Überdeckungsdreieck und damit $\frac{3}{16}$ der Quadratfläche. ❑

Aufgabe 6. In einem regelmäßigen Sechsecks *ABCDEF* seien *X, Y* und *Z* die Mittelpunkte der Seiten *AB, CD* und *EF*.
Gesucht ist das Verhältnis $A_S : A_D$, wenn A_S der Flächeninhalt des Sechsecks und A_D der Flächeninhalt des Dreiecks *XYZ* ist.

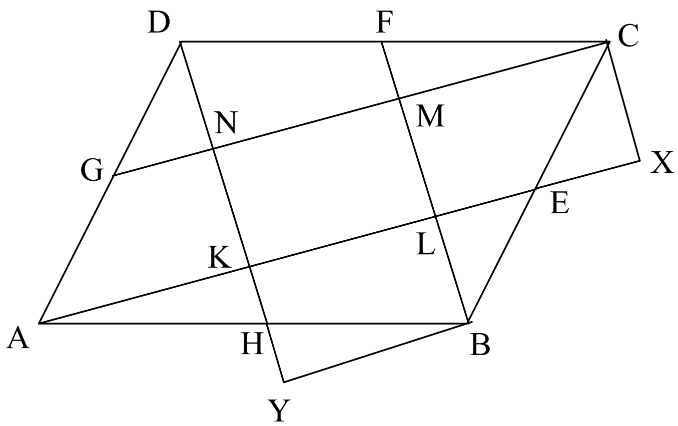
Lösungshinweise: Eine Skizze verweist bereits auf den Lösungsansatz durch „Auszählen“ geeigneter Teilflächen. Mithilfe der gestrichelten Linien zerlegen wir das regelmäßige Sechseck *ABCDEF* in 24 kongruente Teildreiecke, von denen das Dreieck *XYZ* insgesamt 9 dieser Teildreiecke umfasst.



Aufgabe 7 - MO431024. Gegeben sei ein Parallelogramm *ABCD.* Die Seitenmitten von $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ seien mit *H, E, F* bzw. *G* bezeichnet. Die Verbindungslinien $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ und $\overline{DH}$ schneiden im Innern des Parallelogramms ein Viereck *KLMN* aus.

a) Zeigen Sie, dass *KLMN* ein Parallelogramm ist.
b) Bestimmen Sie das Verhältnis des Flächeninhalts dieses Parallelogramms *KLMN* zu dem des Parallelogramms *ABCD*.

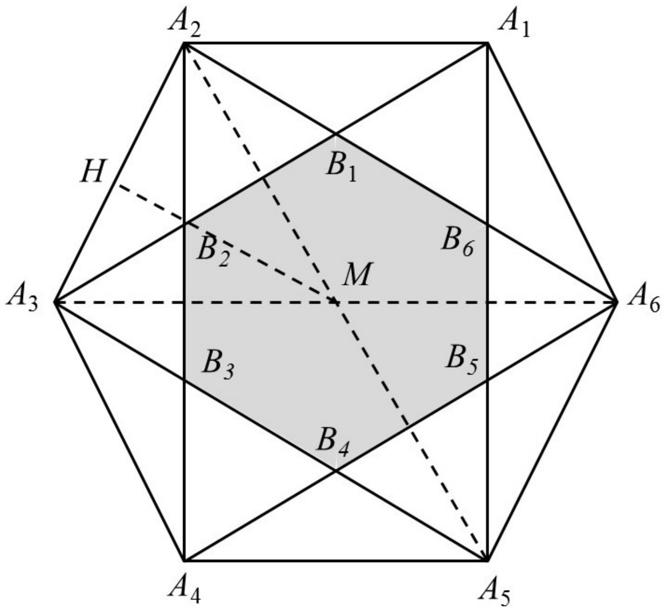
Lösungshinweise: Wieder bereitet die Teilaufgabe (a) die Lösung für (b) vor. Fertigen wir eine Skizze an und beachten die in (a) zu zeigenden Streckenabschnitte, so erkennen wir die prinzipielle Möglichkeit, das Parallelogramm *ABCD* ermitteln mit zu *KLMN* kongruenten Parallelogrammen zu überdecken, wobei allerdings Eckpunkte wie *X* und *Y* außerhalb der Fläche von *ABCD* liegen.



Wir sehen, dass die Dreiecke *BEL* und *EXC* sowie *AKH* und *HYB* kongruent sind und die entstandenen Vierecke *LXCM* bzw. *KYBL* jeweils kongruent (und damit flächengleich) zum Parallelogramm *KLMN* sind.
Ergänzen wir in analoger Weise die Figur über *DF* und *AG* wird unmittelbar ersichtlich, dass die Gesamtfläche des Parallelogramms *ABCD* aus 5 Parallelogrammen der Größe *KLMN* zusammensetzt werden kann. Somit ist das Verhältnis des Flächeninhalts des Parallelogramms *KLMN* zu dem des Parallelogramms *ABCD* wie 1 : 5. ❑

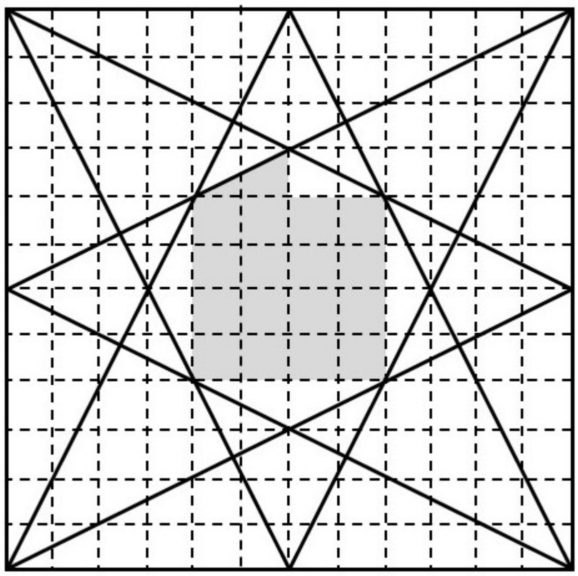
Aufgabe 8 – MO450924. In der Mitte des regelmäßigen Sechsecks $A_1A_2...A_6$ mit dem Flächeninhalt *A* schneiden die sechs Diagonalen $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_2A_4}$, $\overline{A_3A_5}$, $\overline{A_4A_6}$,

$\overline{A_5A_1}$ und $\overline{A_6A_2}$ ein kleineres Sechseck $B_1B_2...B_6$ mit dem Flächen-inhalt B aus. Berechnen Sie den Flächeninhalt B in Abhängigkeit von A.



Lösungshinweise: Zeichnen wir in die Skizze zusätzlich die Geraden A_2A_5, A_3A_6 und MB_2 ein, so erkennen wir, dass das Dreieck A_2A_3M gleichseitig ist und durch die (Hilfs-) Linien in sechs flächengleiche Teildreiecke zerlegt wird. Davon gehören zwei der sechs Teildreiecke zur gesuchten Fläche B. Also nimmt im Dreieck A_2A_3M die Fläche von B genau $\frac{1}{3}$ der zu A gehörenden Fläche ein. Da diese Argumentation für jedes Paar benachbarter Eckpunkte von A ebenso richtig ist, finden wir $B = \frac{1}{3} \cdot A$. ❑

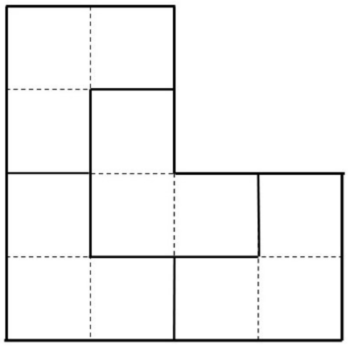
Aufgabe 9. Die Seitenlänge eines Quadrates beträgt 10 cm. Wir verbinden jeden Eckpunkt des Quadrates mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten. Dadurch wird im „Inneren" ein konvexes Achteck gebildet. Wie groß ist der Flächeninhalt dieses Achtecks?



Lösungshinweise: Der Lösungsansatz durch ein Quadratgitter erscheint im Kontext dieser Aufgaben als sinnvoll. Jedoch gelingt es anstatt mit einem 10 x 10 - Netz deutlich einfacher mit einem 12 x 12 - Netz. In diesem Fall liegen nämlich die Eckpunkte des Achtecks auf Gitterpunkten und der Flächeninhalt kann allein durch Auszählen ermittelt werden: 4 x 4 dieser Gitterquadrate in der Mitte und 8 rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten 2 x 1 (d.h. mit dem Flächeninhalt eines Gitterquadrates), also insgesamt 24 Gitterquadrate.
Da jedes dieser Gitterquadrate einen Flächeninhalt von $\frac{100}{144}$ cm² hat, beträgt der Flächeninhalt des Achtecks $24 \cdot \frac{100}{144} = \frac{50}{3}$ cm². ❑

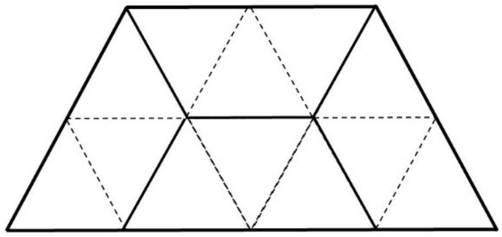
Für die Zerlegung von Flächen muss mitunter erst ein „passendes" Gitternetz gefunden werden.

Aufgabe 10. Zerlegen Sie die Figur in nebenstehender Abbildung in vier kongruente Teile.



Lösungshinweise: Aufgrund der aus Quadraten zusammengesetzten Figur liegt die Anwendung eines quadratischen Gitternetzes nahe. Zudem sollte die Anzahl der Gitterquadrate ein Vielfaches von 4 sein. Tatsächlich gelingt die geforderte Zerlegung mit den 12 Gitterquadraten wie in der Abbildung. ❑

Aufgabe 11. Zerlegen Sie die Figur in nebenstehender Abbildung in vier kongruente Teile. Dabei betragen die Länge der Grundseite 2 Längeneinheiten (LE) und die Längen der drei anderen Seiten jeweils 1 LE.

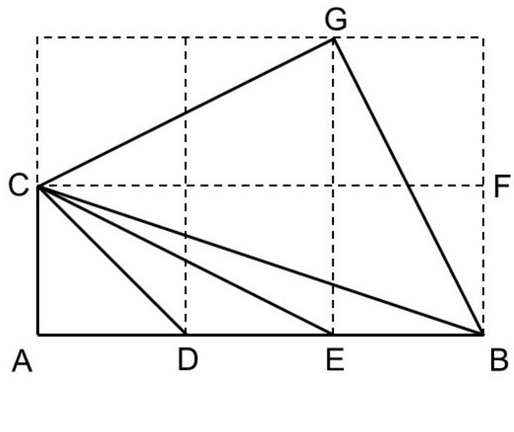


Lösungshinweise: Aufgrund der Seitenlängen sind die Größen der spitzen Innenwinkel jeweils 60°. Deshalb besteht die Figur aus drei gleichseitigen Dreiecken. Doch dies genügt nicht für eine Zerlegung in vier kongruente Teile. Jedoch sollte bekannt sein, dass man jedes Dreieck in vier kongruente Dreiecke zerlegen kann – somit können wir ein Gitter aus gleichseitigen Dreiecken konstruieren, sodass 12 Gitterdreiecke die Figur bilden. Tatsächlich gelingt die geforderte Zerlegung mit den 12 Gitterdreiecken wie in der Abbildung. ❑

Abschließend eine Aufgabe mit Quadratgitter als Lösungsansatz, bei der es nicht um Flächenberechnung geht.

Aufgabe 12. Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\sphericalangle BAC = 90°$ und $|AB| = 3 \cdot |AC|$. Die Punkte D und E dritteln die Kathete AB. Ermitteln Sie die Summe der drei Winkel $\sphericalangle CDA$, $\sphericalangle CEA$ und $\sphericalangle CBA$.

Lösungshinweise: Wir erkennen unmittelbar im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ADC die Winkelgröße $\sphericalangle CDA = 45°$. Konstruieren wir ein Quadratgitter über das Dreieck, so ist das Dreieck CBG ebenfalls gleichschenklig-rechtwinklig. Zudem ist $\sphericalangle FCG$ Stufenwinkel zu $\sphericalangle CBE$, $\sphericalangle BCF$ Wechselwinkel zu $\sphericalangle CBA$ und $\sphericalangle GBC = 45°$. Folglich beträgt die gesuchte Winkelsumme gemäß Innenwinkelsummensatzes im Dreieck CBG 90°.



Literatur: Ambrus A, Berta T. Zur Verwendung von Quadrat- Dreiecks- und Würfelgitter beim Lösen mathematischer Aufgaben. In: Mathematikinformation, Heft Nr. 45, TU Braunschweig, klartext GmbH print- & medienservice, Göttingen, 2006. (s. http://www.mathematikinformation.info/pdf/MI45Ambrus.pdf, 10.04.21)