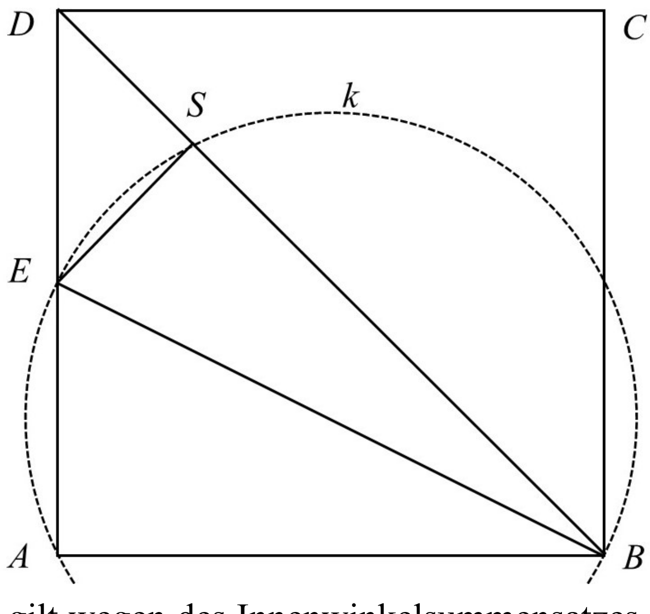
Thema 04: MO601023 – Flächenberechnung (I)

Vorbemerkungen: Für die Lösungsdarstellung ist dringend zu empfehlen, die Bezeichnungen und Lösungsschritte durch eine Zeichnung zu verdeutlichen. Dabei kommt es darauf an, die Bezeichnungen auch im Text festzulegen und Zusammenhänge nicht nur „freihändig“ zu skizzieren. Es kann immer hilfreich sein, Lösungsansätze zunächst an Spezialfällen zu finden. Selbst wenn eine allgemeine Lösung nicht gelingen sollte, wird dies in der MO-Bewertung mit Punkten honoriert, und zwar abhängig davon, wie verallgemeinerungsfähig der beschriebene Spezialfall behandelt wurde. Jedoch sollte die Zeichnung nicht nur den Spezialfall abbilden, weil dadurch ggf. die Tücken der Verallgemeinerung übersehen werden.

Aufgabe 1 - MO601023. Gegeben ist ein Quadrat *ABCD* mit der Seitenlänge 1. Es sei *E* der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AD}$. Die Strecke $\overline{BE}$ ist der Durchmesser eines Kreises *k*. Der Kreis *k* schneidet die Diagonale $\overline{BD}$ in *S*.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks *EBS*.

Lösungshinweise: Es erscheint möglich, für das zu betrachtende Dreieck *EBS* Bestimmungsstücke so zu ermitteln, dass daraus der Flächeninhalt A_{EBS} berechnet werden kann. Aufgrund der Konstruktionsvorschrift ist das Dreieck *EBS* nach dem Satz von THALES rechtwinklig mit dem rechten Winkel am Punkt *S*. Es genügt also, die Längen der Strecken $\overline{ES}$ und $\overline{BS}$ zu ermitteln.



Wegen $\sphericalangle DSE = 90°$ und $\sphericalangle EDS = 45°$ gilt wegen des Innenwinkelsummensatzes auch $\sphericalangle SED = 45°$. Das Dreieck *ESD* ist folglich gleichschenklig-rechtwinklig. Die Länge der Strecke $\overline{ES}$ ist gleich der Länge einer Quadratseite eines Quadrates mit der Diagonalenlänge $|DE| = \frac{1}{2}$, also $|ES| = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2}$. Im gleichschenkligen Dreieck *ESD* gilt also auch $|DS| = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2}$ und somit

$$|BS| = |BD| - |DS| = \sqrt{2} - \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2}.$$

Für den Flächeninhalt des Dreiecks *EBS* finden wir also:

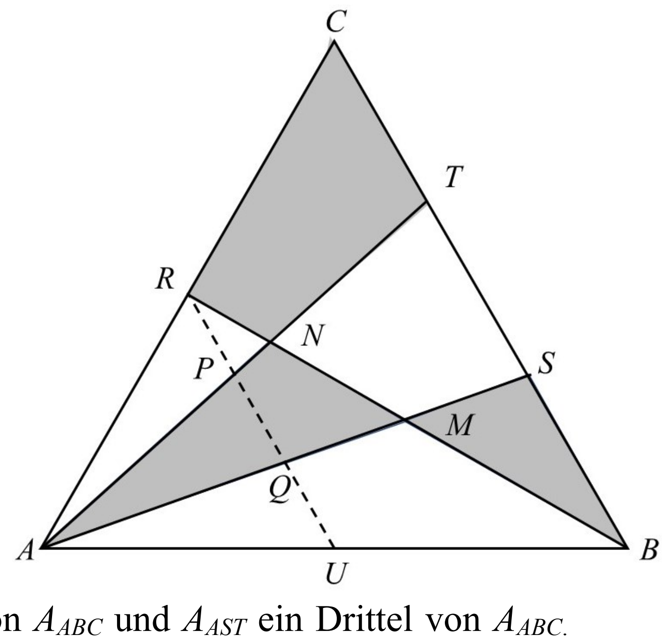
$$A_{EBS} = \frac{1}{2} \cdot |ES| \cdot |BS| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{2} \cdot \frac{3}{4}\sqrt{2} = \frac{3}{16}$$ ❑

Lösungsvariante: Zu dieser Aufgabe werden von der Aufgabenkommission weitere Lösungsvarianten diskutiert, die ebenfalls auf der Erkenntnis basieren, dass das Dreieck *ESD* gleichschenklig-rechtwinklig ist. Durch die Betrachtung andere Teilflächen wird die Lösung über Summen bzw. Differenzen von Flächen ermittelt. So können wir folgende Zerlegung der Quadratfläche erkennen:

Der Flächeninhalt des Dreiecks *BCD* beträgt die Hälfte der Quadratfläche.
Der Flächeninhalt des Dreiecks *ABE* beträgt ein Viertel der Quadratfläche.
Unter Berücksichtigung der Erkenntnisse zum Dreieck *ESD* beträgt sein Flächeninhalt $\frac{1}{16}$ der Quadratfläche. Somit beträgt die gesuchte Fläche:

$$A_{EBS} = A_{ABCD} - A_{BCD} - A_{ABE} - A_{DES} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}. \qquad \square$$

Aufgabe 2 – MO430936/MO1036. Im Entwurf für ein Logo der Vereinigung „Innovative Mathematik" bilden die getönten Flächen die stilisierten Buchstaben I und M (siehe Abbildung). Das Dreieck *ABC* ist gleichseitig mit der Seitenlänge *a* = 6 cm, $\overline{AC}$ wird von *R* halbiert und $\overline{BC}$ von *S* und *T* in drei gleich große Teile geteilt. Welchen Anteil der Dreiecksfläche überdecken die stilisierten Buchstaben zusammen?



Lösungshinweise: Zusätzlich zu den gegebenen Punkten der Aufgabenstellung bezeichnen wir die Schnittpunkte der Geraden *AS* und *AT* mit der Geraden *BR* mit *M* bzw. *N*. Die Höhe in einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge *a* beträgt $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{3}$. Die gesuchte Fläche A ergibt sich aus der Flächenzerlegung:

$$A = A_{BCR} - (A_{AST} - A_{AMN}) + A_{AMN}$$

$$A = A_{BCF} - A_{AST} + 2 \cdot A_{AMN}$$

Laut Konstruktion sind A_{BCF} die Hälfte von A_{ABC} und A_{AST} ein Drittel von A_{ABC}. Außerdem gilt $A_{AMN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a \cdot |MN|$, weil $\overline{AR}$ die Höhe im Dreieck *AMN* ist. Wenn wir die Länge der Strecke $\overline{MN}$ in Abhängigkeit von *a* ermitteln können, lässt sich der gesuchte Flächeninhalt berechnen.

Fügen wir die Mittelparallele zu *BC* durch *R* (mit dem Schnittpunkt *U* auf *AB*) ein, so wird die Strecke $\overline{RU}$durch die Schnittpunkte von *RP* mit *AT* und *AS* (*P* bzw. *Q*) gedrittelt, d.h. es gilt $|RP| = \frac{1}{6} a$. Aus der Strahlensatzfigur mit Zentrum *N* und den Parallelen *RQ* und *BC* finden wir

$$\frac{|RN|}{|NB|} = \frac{|RP|}{|BT|} = \frac{\frac{1}{6} \cdot a}{\frac{2}{3} \cdot a} = \frac{1}{4}$$

Wegen $|RN| + |NB| = h$ erhalten wir $|RN| = \frac{1}{5} \cdot h$.

Aus der Strahlensatzfigur mit Zentrum M und den Parallelen RQ und BC finden wir außerdem

$$\frac{|RM|}{|MB|} = \frac{|RQ|}{|BS|} = \frac{\frac{2}{6} \cdot a}{\frac{1}{3} \cdot a} = 1$$

also $|RM| = \frac{1}{2} \cdot h$

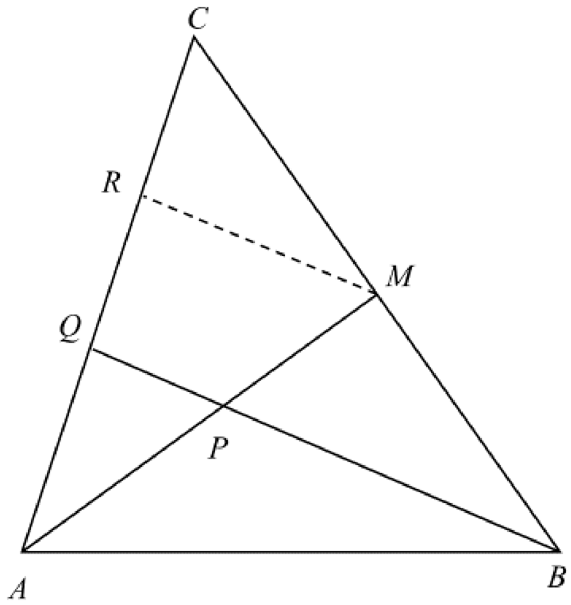
Wegen $|MN| = |RM| - |RN|$ erhalten wir $|MN| = \frac{1}{2} \cdot h - \frac{1}{5} \cdot h = \frac{3}{10} \cdot h$. Insgesamt finden wir also:

$$A = A_{BCF} - A_{AST} + 2 \cdot A_{AMN} = \frac{1}{4} \cdot ah - \frac{1}{6} \cdot ah + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} \cdot h \cdot \frac{1}{2} a = \frac{14}{30} \cdot \frac{ah}{2}$$

Die gesuchte Fläche beträgt also $\frac{7}{15}$ der Fläche des Dreiecks ABC. ❑

Auf dem ersten Blick sehr ähnlich wurde auch in der 57. MO eine Aufgabe mit Flächenberechnung gestellt. Allerdings erwies sich die Ermittlung der Teilflächen als viel einfacher.

Aufgabe 3 - MO570935. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit dem Flächeninhalt $A_{ABC} = 1$. Es sei M der Mittelpunkt von BC und P der Mittelpunkt von AM. Weiter schneide die Gerade BP die Seite AC in einem Punkt Q.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $MCQP$.



Lösungshinweise: Der Flächeninhalt des Vierecks ist die Differenz aus dem Flächeninhalt des Dreiecks A_{AMC} und dem Dreieck A_{APG}. Da der Flächeninhalt des Dreiecks AMC die Hälfte des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC ist, genügt es, den Flächeninhalt des Dreiecks APG zu bestimmen.

Ist R der Mittelpunkt der Strecke $\overline{QC}$, dann ist die Strecke $\overline{MR}$ Mittellinie im Dreieck QBC und folglich $MR \parallel BQ$. Da P auf der Strecke BQ liegt und Mittelpunkt der Strecke $\overline{AM}$ ist, ist die Strecke $\overline{PQ}$ Mittellinie im Dreieck AMR, also gilt $|AQ|=|QR|=|RC|$.

Damit beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks ABQ ein Drittel des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC, da die Längen der Grundseiten $\overline{AQ}$ und $\overline{AC}$ zur selben Höhe im Verhältnis 1 : 3 stehen. Da P der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AM}$ ist, ist zudem der Flächeninhalt des Dreiecks ABP halb so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks ABM. Da M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ is, ist auch der Flächeninhalt des Dreiecks ABM halb so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks ABC. Daraus folgt für den Flächeninhalt des Dreiecks APQ:

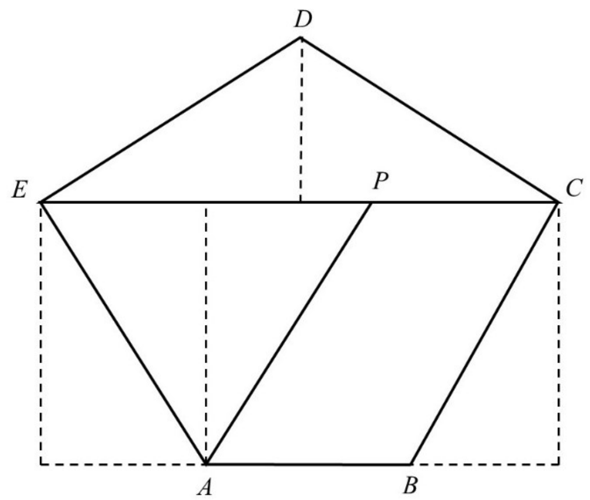
$$A(APQ) = A(ABQ) - A(ABP) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Wir erhalten deshalb für den gesuchten Flächeninhalt des Vierecks $MCQP$:

$$A(MCQP) = A(AMC) - A(APQ) = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}\ .$$ ❑

Aufgabe 4 – MO590935/MO591035. Gegeben sei ein konvexes Fünfeck $ABCDE$ mit $|BC| = |CD| = |DE| = |EA| = a\ und\ |\sphericalangle AED| = |\sphericalangle DCB| = 90°$ sowie $|\sphericalangle EDC| = 120°$.

a) Beweisen Sie, dass es möglich ist, das Fünfeck in zwei einander flächeninhaltsgleiche Dreiecke und ein Parallelogramm zu zerlegen.
b) Berechnen Sie den Umfang und den Flächeninhalt des Fünfecks in Abhängigkeit von a.



Lösungshinweise: Die Teilaufgabe a) bereitet die Lösung für b) vor. Ohne eine geeignete Flächenzerlegung wäre die Berechnung des Flächeninhaltes kaum möglich. Für den Nachweis der Möglichkeit genügt die Angabe einer geeigneten Zerlegung, d.h. wir müssen zeigen, dass unser Vorschlag ein Fünfeck mit den geforderten Eigenschaften realisiert.

Es sind P so gewählt, dass das Dreieck APE gleichseitig mit der Seitenlänge a ist, und D so, dass $|CD| = |DE| = a$ sowie $|\sphericalangle EDC| = 120°$ gilt. Leicht zeigt man, dass $ABCDE$ ein Fünfeck mit den geforderten Eigenschaften ist (was aber in der Lösungsdarstellung detailliert erfolgen muss!). Die Dreiecke APE und CDE haben den gleichen Flächeninhalt, nämlich $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$. Weiterhin finden wir die Gleichung $|PC| = |EC| - |EP| = 2 \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{3} - a = \left(\sqrt{3} - 1\right) \cdot a$. Somit gilt

$$A_{ABCP} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right) \cdot a = \frac{3}{2} \cdot a^2 - \frac{1}{2} \cdot a^2\sqrt{3}$$

Insgesamt erhalten wir für den Flächeninhalt des Fünfecks:

$$A_{ABCDE} = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot a^2\sqrt{3} + \frac{3}{2} \cdot a^2 - \frac{1}{2} \cdot a^2\sqrt{3} = \frac{3}{2} \cdot a^2$$ ❑