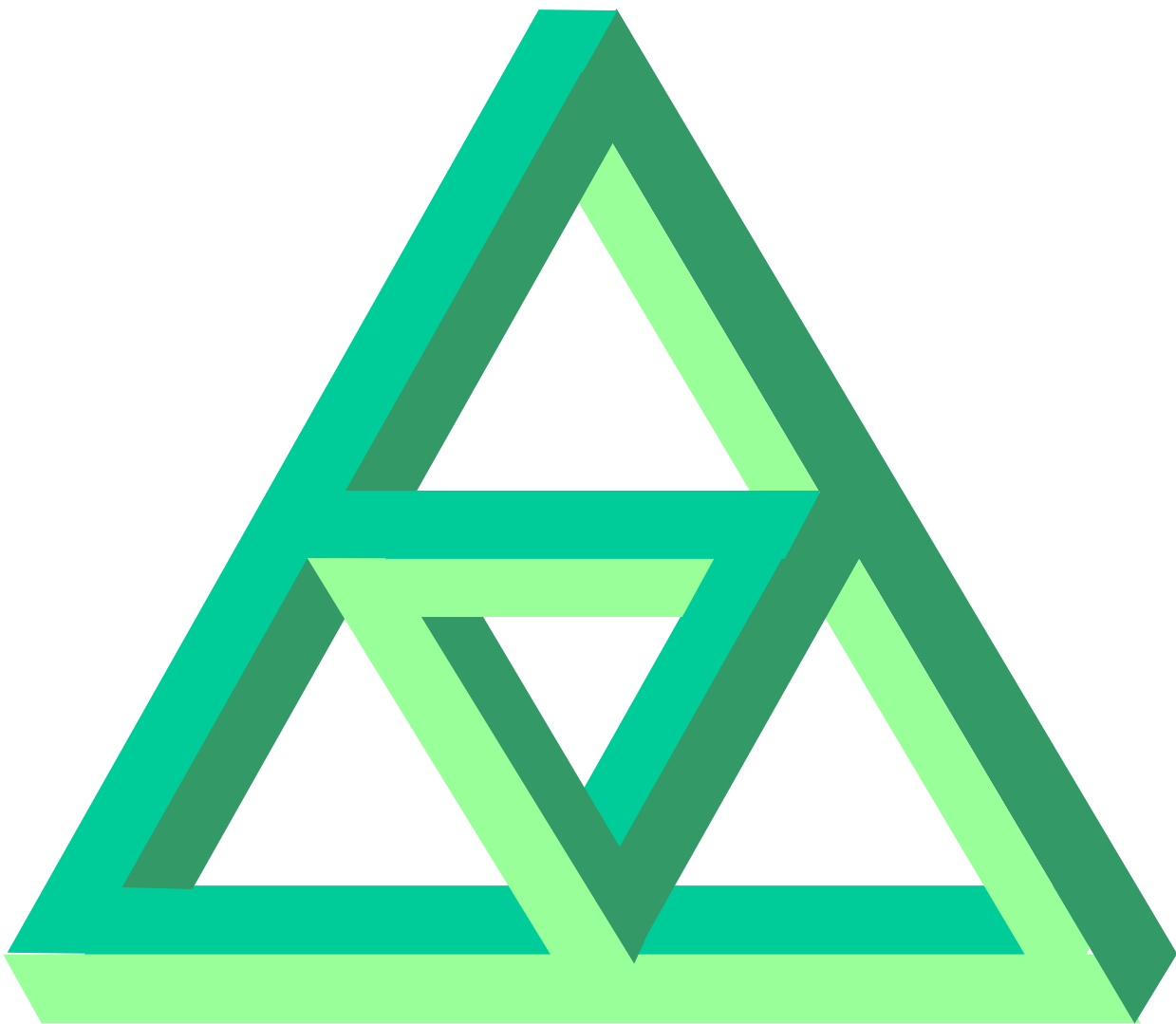


Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben¹ thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10² haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Mit Bezug zur Aufgabe **MO641024** setzen wir das Thema 25 „Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken“ mit weiteren Aufgaben fort und verweisen auf die Notwendigkeit, deren Lösungen stets mit der Bestimmung des Definitionsbereiches zu beginnen.

Die offiziellen Lösungshinweise zur Aufgabe **MO640922** enthalten verschiedene Lösungsvarianten, darunter auch eine mit Verwendung eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Wir finden in der Sammlung der MO-Aufgaben wiederholt Aufgaben, bei denen ein solcher Lösungsansatz zielführend ist. Die damit verbundene Möglichkeit, z.B. die Lage von Punkten oder die Längen von Strecken berechnen zu können, kann die Lösungsdarstellung vereinfachen. Wir verzichten in den Beispielen jedoch, einen rein geometrischen Lösungsansatz gegenüberzustellen. Dies sollte aber zur Übung stets versucht werden.

Das Thema „Koordinatensystem“ ist eng mit RENE DESCARTES verbunden. Ein Auszug aus seinem Werk „La Géométrie“ aus dem Jahr 1637 zeigt, wie er algebraische Grundoperationen auf geometrische Objekte übertrug.

Unter Terminen sei ausdrücklich auf den **7. Tag der Mathematik** der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz am Samstag, dem 5. April 2025 hingewiesen. Die Anmeldung zu den beliebten Team-Wettbewerben in den Klassenstufen 8 – 10 sowie 11/12 muss bis 20. März 2025 erfolgen.

¹ www.mathematik-olympiaden.de

² https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 25.2 – Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken³

Aufgabe 25.07 – MO641024. Für die reellen Zahlen x und y betrachten wir den Ausdruck

$$x \cdot \sqrt{1 - y^2} + y \cdot \sqrt{1 - x^2}$$

- Untersuchen Sie, für welche reellen Zahlen x und y der Ausdruck definiert ist.
- Geben Sie drei Beispiele für Werte von x und y an, für die der Wert des Ausdrucks -1 beträgt.
- Zeigen Sie, dass es keine reellen Zahlen x und y gibt, für die der Ausdruck definiert und größer als 1 ist.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Der Ausdruck ist genau dann definiert, wenn die Radikanden der auftretenden Wurzeln nichtnegativ sind, also wenn $x^2 \leq 1$ und $y^2 \leq 1$ gilt. Der Ausdruck ist also genau für alle (x, y) mit $-1 \leq x \leq 1$ und $-1 \leq y \leq 1$ definiert.

(Hinweis: Auch wenn es nicht als Teilaufgabe formuliert wäre – die Diskussion zum Definitionsbereich ist eine wesentliche Komponente der Lösungsdarstellung bei Wurzelauflösungen.)

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Da die Wurzeln stets nichtnegativ sind, müssen x oder y (oder beide Variablen) negativ sein.

Wir finden mit $(-1; 0)$ und $(0; -1)$ Beispiele für Lösungen der geforderten Gleichung, denn es gilt:

$$\begin{aligned} -1 \cdot \sqrt{1 - 0^2} + 0 \cdot \sqrt{1 - (-1)^2} &= -1 \\ 0 \cdot \sqrt{1 - (-1)^2} - 1 \cdot \sqrt{1 - 0^2} &= -1 \end{aligned}$$

Wir suchen weitere Lösungen und nehmen zur Vereinfachung beispielsweise $x = y$ an und erhalten damit $2 \cdot x \cdot \sqrt{1 - x^2} = -1$. Nach Quadrieren führt dies zu $4 \cdot x^4 - 4 \cdot x^2 + 1 = 0$ mit den Lösungen (gemäß der bekannten Lösungsformel) $x_{1/2}^2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$. Somit ist (weil $x < 0$ erforderlich) auch $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{2})$ ein geeignetes Beispiel, das durch eine Probe bestätigt wird:

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = -1$$

³ S. Thema 25.1 in Heft 11/2023

Wir können bei der Suche nach weiteren Beispielen y in Abhängigkeit von x beschreiben. Setzen wir beispielsweise $x = -\frac{1}{2}$, so finden wir:

$$-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1-y^2} + y \cdot \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -1 \quad \text{I Umformen}$$

d.h.,

$$\sqrt{1-y^2} = 2 + y \cdot \sqrt{3} \quad \text{I Quadrieren}$$

$$1-y^2 = 4 + 4y\sqrt{3} + 3y^2 \quad \text{I Zusammenfassen und Umformen}$$

$$4y^2 + 4y\sqrt{3} + 3 = 0 \quad \text{I : 4}$$

$$y^2 + y\sqrt{3} + \frac{3}{4} = 0 \quad \text{I Anwendung der Lösungsformel}$$

$$y_{1/2} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \frac{3}{4}} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Damit sind $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ und $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}; -\frac{1}{2}\right)$ weitere Beispiele der geforderten Art, denn es gilt:

$$-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1$$

Wir verallgemeinern diesen Ansatz und wählen $-1 < x < 0$ beliebig, aber fest. Dann formen wir die gegebene Gleichung äquivalent um:

$$x \cdot \sqrt{1-y^2} = -1 - y \cdot \sqrt{1-x^2}$$

$$x^2 - x^2y^2 = 1 + 2y \cdot \sqrt{1-x^2} + y^2 - x^2y^2$$

$$y^2 + 2y \cdot \sqrt{1-x^2} + 1 - x^2 = 0$$

$$y_{1/2} = \sqrt{1-x^2} \pm \sqrt{\sqrt{1-x^2}^2 - 1 + x^2} = \sqrt{1-x^2}$$

Somit sind auch alle Punktepaare $(x; y)$ mit $x^2 + y^2 = 1$ für $x; y \leq 0$ ebenfalls Lösungen der geforderten Gleichung, denn es gilt:

$$x \cdot \sqrt{1-y^2} + y \cdot \sqrt{1-x^2} = x \cdot |x| + y \cdot |y| = -x^2 - y^2 = -1$$

Wir können deshalb sogar unendlich viele Beispiele der geforderten Art angeben.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Angenommen, es gibt Zahlen x und y aus dem Definitionsbereich, für die $x \cdot \sqrt{1-y^2} + y \cdot \sqrt{1-x^2} > 1$ erfüllt ist. Dann gilt auch

$$\left(x \cdot \sqrt{1-y^2}\right)^2 > \left(1 - y \cdot \sqrt{1-x^2}\right)^2$$

weil der Wert von $1 - y \cdot \sqrt{1 - x^2}$ wegen $y \leq 1$ und $0 \leq \sqrt{1 - x^2} \leq 1$ nichtnegativ ist. Daraus folgt

$$x^2 \cdot (1 - y^2) > 1 - 2y \cdot \sqrt{1 - x^2} + y^2 \cdot (1 - x^2)$$

und weiter

$$0 > y^2 - 2y\sqrt{1 - x^2} + (1 - x^2) = (y - \sqrt{1 - x^2})^2$$

wobei im letzten Schritt wieder die binomische Formel angewendet wurde. Wir erhalten einen Widerspruch, da das Quadrat einer reellen Zahl stets nicht-negativ ist. Die Annahme war also falsch. Es gibt keine reellen Zahlen x, y , für die der Ausdruck definiert und größer als 1 ist.

Aufgabe 25.08 – MO071046. Man gebe alle reellen x an, die folgende Gleichung erfüllen:

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}$$

Lösungshinweise: Wir bestimmen zunächst den Definitionsbereich. Einerseits muss $x \geq \sqrt{x}$ gelten, damit der mittlere Wurzelausdruck definiert ist. Dies ist äquivalent zu $x \geq 1$ oder $x = 0$. Dabei entfällt $x = 0$, weil sonst der Nenner im rechten Ausdruck gleich 0 wäre. Weil $x + \sqrt{x} \geq 0$ sein muss (damit der linke Wurzelausdruck definiert ist, muss auch $x \geq 0$ sein (damit der rechte Wurzelausdruck definiert ist). Es gilt also $x \geq 1$.

Durch Multiplikation mit $x + \sqrt{x}$ geht die Gleichung äquivalent in

$$x + \sqrt{x} - \sqrt{x^2 - x} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad x - \sqrt{x^2 - x} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x} \quad | : \sqrt{x} > 0$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{x - 1} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} - \frac{1}{2} = \sqrt{x - 1} \quad | : \text{quadrieren}$$

$$x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} = x - 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = \frac{5}{4}$$

Wir erhalten als einzige Lösung $x = \frac{25}{16}$. Da alle Umformungen als äquivalent ausgewiesen wurden (was aber explizit formuliert sein muss!), ist keine Probe erforderlich. Sie sollte aber dennoch ausgeführt werden:

$$\sqrt{\frac{25}{16} + \frac{5}{4}} - \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{5}{4}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{\frac{25}{16}}{\frac{25}{16} + \frac{5}{4}}}$$

$$\sqrt{\frac{45}{16}} - \sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{25}{16} \cdot \frac{16}{45}}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \sqrt{5} - \frac{1}{4} \cdot \sqrt{5} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{9}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}$$

□

Aufgabe 25.09 - MO211034. Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x , die die Ungleichung erfüllen:

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 3 \cdot x^2}}{x} < 1$$

Lösungshinweise: Wir untersuchen zunächst den Definitionsbereich. Damit der Bruch existiert, ist $x \neq 0$. Damit der Wurzelausdruck existiert, muss $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ gelten.

Wegen $0 < |x| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist $1 - 3 \cdot x^2 < 1$, d.h. $\sqrt{1 - 3 \cdot x^2} < 1$. Also ist der Zähler auf der linken Seite positiv. Der Bruch besitzt also das gleiche Vorzeichen wie der Nenner x .

Ist dieser negativ, so ist die Ungleichung offensichtlich erfüllt, so dass wir ein erstes Lösungsintervall $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; 0\right)$ erhalten.

Ist dagegen $0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, dann ist die Ungleichung nach Multiplikation mit $x > 0$ und Subtraktion von 1 äquivalent zu $-\sqrt{1 - 3 \cdot x^2} < x - 1$ bzw. $\sqrt{1 - 3 \cdot x^2} < 1 - x$. Da $\frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ gilt, sind beide Seiten dieser Ungleichung nichtnegativ und also ist die Ungleichung äquivalent zu

$$1 - 3 \cdot x^2 > (1 - x)^2 = 1 - 2 \cdot x + x^2$$

bzw.

$$0 > -2 \cdot x + 4 \cdot x^2 = (-2 \cdot x) \cdot (1 - 2 \cdot x).$$

Wegen $x > 0$ ist $-2 \cdot x < 0$, die Ungleichung also äquivalent zu $1 - 2 \cdot x > 0$ bzw. $x < \frac{1}{2}$. Da $2 > \sqrt{3}$ gilt, ist $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, sodass tatsächlich alle positiven x mit $x < \frac{1}{2}$ die Ungleichung erfüllen (und die weiteren nicht).

Zusammenfassend erhalten wir, dass genau all jene x aus der Menge $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$ die Ungleichung erfüllen. □

Ergänzende Diskussion: Bei Gleichungen ist der Verzicht auf die Bestimmung des Definitionsbereiches meist durch das Ausführen der Probe auszugleichen. Hier werden Scheinlösungen erkannt, was nachträglich dazu führen wird, den Definitionsbereich zu beachten. Wollen wir jedoch die Ungleichung

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 3 \cdot x^2}}{x} < 1$$

lösen, beachten wir natürlich die Bedingung $x \neq 0$. Damit können wir in zwei Fällen auswerten und umformen:

$$\text{Fall (1)} \quad x > 0: 1 - \sqrt{1 - 3 \cdot x^2} < x \quad \Rightarrow \quad 1 - x < \sqrt{1 - 3 \cdot x^2}$$

Beachten wir weiter die Einschränkung $x \leq 1$ (damit die linke Seite der Ungleichung nicht-negativ ist), so können wir beide Seiten quadrieren und erhalten

$$1 - 2 \cdot x + x^2 < 1 - 3 \cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad 2x \cdot (2x - 1) < 0.$$

Das Produkt beider Faktoren ist negativ, wenn $2x - 1 < 0$, also $0 < x < \frac{1}{2}$ (wie auch bei obiger Lösung).

$$\text{Fall (2)} \quad x < 0: 1 - \sqrt{1 - 3 \cdot x^2} > x \quad \Rightarrow \quad 1 - x > \sqrt{1 - 3 \cdot x^2}$$

Für negative x ist die linke Seite der Ungleichung nicht-negativ (ebenso wie der Wurzelausdruck[#]) und wir können beide Seiten quadrieren und erhalten

$$1 - 2 \cdot x + x^2 > 1 - 3 \cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad 2x \cdot (2x - 1) > 0.$$

Das Produkt beider Faktoren ist positiv, wenn $2x - 1 < 0$, also wenn $x < \frac{1}{2}$ (und gleichzeitig $x < 0$) gilt. Damit scheinen alle negativen Zahlen die Ungleichung zu erfüllen. Würden wir einige spezielle Werte für x einsetzen, erkennen wir schnell, dass dies im Allgemeinen nicht richtig ist: der Wurzelausdruck # darf nur quadriert werden, wenn er überhaupt existiert (also reellwertig ist)!

Thema 31 – Lösungsstrategien im Koordinatensystem

Für geometrische Aufgabenstellungen kann es hilfreich sein, das Problem in einem kartesischen Koordinatensystem darzustellen. Dann lassen sich häufig die Lage von Punkten, die Länge von Strecken oder die Abstände von Punkten und Geraden berechnen. Wenn nicht ausdrücklich die Verwendung eines Koordinatensystems in der Aufgabenstellung gefordert wird, gibt es im Allgemeinen eine Lösung ohne dessen Verwendung⁴. So auch in folgender Aufgabe der 2. Runde dieses Jahrgangs, bei der in der Lösungsdiskussion der Aufgabenkommission dieser Ansatz als dritte Lösungsvariante angegeben wurde.

Aufgabe 31.01 – MO640922. Wir betrachten rechtwinklige Dreiecke $\triangle ABC$ mit den Katheten \overline{BC} und \overline{AC} , also mit rechtem Winkel bei C . Weiterhin betrachten wir in beiden Teilaufgaben die Winkelhalbierende des rechten Winkels, die wir mit CW

⁴ Zur Übung sollte ein solcher Beweis dargestellt werden.

bezeichnen. Der Punkt W liegt somit auf der Winkelhalbierenden und der Hypotenuse \overline{AB} .

- a) In dieser Teilaufgabe ist $|\overline{BC}| = 12$ und $|\overline{AC}| = 6$. Bestimmen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte der Teildreiecke ΔAWC und ΔWBC .
- b) Auch hier soll $|\overline{BC}| = 12$ sein. Aber die Länge der Strecke $|\overline{AC}|$ soll so bestimmt werden, dass sie und die Abstände des Punktes W zu den Katheten \overline{BC} und \overline{AC} alle ganzzahlig sind.
Für welche Werte von $|\overline{AC}|$ ist das der Fall?

Lösungshinweise: Wir wählen ein rechtwinkliges Koordinatensystem, in dem die gegebenen Punkte die Koordinaten $C(0, 0)$, $A(b, 0)$ und $B(0, 12)$ haben, d.h., die Katheten liegen auf den Achsen und der rechte Winkel fällt mit dem Koordinatenursprung zusammen. Wir berechnen zunächst die Koordinaten für den allgemeinen Fall.

Die Winkelhalbierende durch C hat die Gleichung $y = x$, die Gerade durch A und B führt mit dem allgemeinen Ansatz $y = mx + n$ zu folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} A(b, 0): \quad 0 &= mb + n \\ B(0, a): \quad a &= m \cdot 0 + n \end{aligned}$$

Damit erhalten wir aus der zweiten Gleichung $n = a$ und folglich aus der ersten Gleichung $m = -\frac{a}{b}$. Setzen wir laut Voraussetzung $a = 12$, finden wir die Funktionsgleichung

$$y = -\frac{12}{b} \cdot x + 12 \quad \Rightarrow \quad 12 \cdot x + b \cdot y = 12 \cdot b.$$

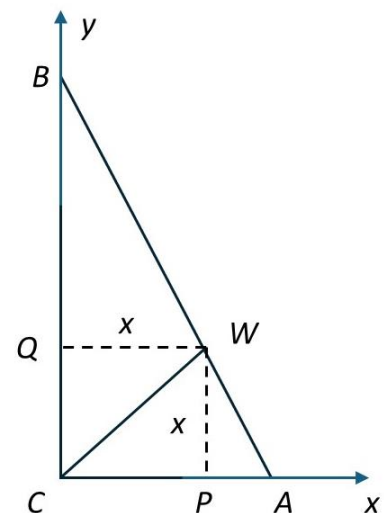
Die Koordinaten von $W(w, w)$ ergeben sich damit aus der Bestimmungsgleichung $12 \cdot w + b \cdot w = 12 \cdot b$ zu $w = \frac{12b}{12+b}$. Da die Fußpunkte der Lote von W auf die Koordinatenachsen die Punkte $P(w, 0)$ und $Q(0, w)$ sind, ist w auch der Abstand von W zu den Katheten des rechtwinkligen Dreiecks.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Es ist $b = 6$, womit sich $w = 4$ ergibt. Für die Flächeninhalte der zu untersuchenden Dreiecke erhalten wir daraus

$$A_{AWC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12 \quad \text{und} \quad A_{BCW} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 = 24$$

woraus $A_{AWC} : A_{BCW} = 1 : 2$ folgt.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Den Ausdruck $x = \frac{12b}{12+b}$ formen wir um zu



$$x = \frac{12b + 144 - 144}{12 + b} = 12 \cdot \left(1 - \frac{12}{12 + b}\right) = 12 + \frac{144}{12 + b}.$$

Weil x ganzzahlig sein soll, muss auch $\frac{144}{12+b}$ ganzzahlig sein, also $12 + b$ ein Teiler von 144. Die Teiler von 144, die größer als 12 sind, lauten 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144. Daraus ergeben sich als notwendige Bedingung die folgenden Werte für b und x :

b	4	6	12	24	36	60	132
x	3	4	6	8	9	10	11

Alle Werte sind ganzzahlig und erfüllen somit die Aufgabenstellung. Die Bedingung ist also auch hinreichend. Damit kann $|\overline{AC}|$ die Werte für b aus der Tabelle annehmen. \square

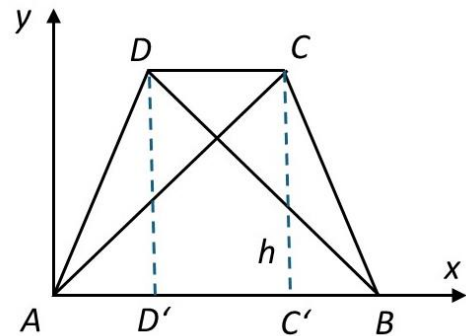
Auch in der aktuellen Auflage des sächsischen Korrespondenzzirkels Mathematik lässt sich eine Lösung im Koordinatensystem finden:

Aufgabe 31.02 – KZM-4-4. Das Viereck $ABCD$ sei ein gleichschenkliges Trapez mit $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ und $|\overline{DA}| = |\overline{BC}|$, in dem die Diagonalen \overline{AC} und \overline{BD} senkrecht zueinander stehen.

Beweisen Sie: Die Mittellinie und die Höhe des Trapezes $ABCD$ sind gleich lang.

Lösungshinweise: Wir bezeichnen die Länge der Grundseite \overline{AB} mit a und die der Höhe mit h . Weiter seien C' und D' die Fußpunkte der Lote von C und D auf \overline{AB} mit $|\overline{C'D'}| = |\overline{CD}|$.

Wir legen das Trapez $ABCD$ so in ein (zweidimensionales) kartesisches Koordinatensystem, dass $A(0;0)$ mit dem Ursprung zusammenfällt und B auf der x -Achse liegt, also $B(a; 0)$.



Wir betrachten m_{AC} als Anstieg der Diagonale \overline{AC} und m_{BD} als Anstieg der Diagonale \overline{BD} . Aus Symmetriegründen sind beide Anstiege betragsmäßig gleich groß, d.h. $|m_{AC}| = |m_{BD}|$. Weil die Diagonalen laut Voraussetzung senkrecht aufeinander stehen, gilt zudem $m_{AC} \cdot m_{BD} = -1$. Dies kann nur durch $m_{AC} = 1$ und $m_{BD} = -1$ erfüllt werden.

Damit ist das Dreieck $\triangle AC'C$ gleichschenkelig-rechtwinklig mit rechtem Winkel bei C' . Deshalb gilt $C'(h; 0)$. Ebenso ist das Dreieck $\triangle BDD'$ gleichschenkelig-rechtwinklig mit rechtem Winkel bei D' . Deshalb gilt $D'(a - h; 0)$. Aus den Koordinaten von C' und D' finden wir die Länge der Strecke $|\overline{C'D'}| = |\overline{CD}| = h - (a - h) = 2h - a$. Abschließend gilt für die Länge der Mittellinie des Trapezes wie behauptet

$$\frac{|\overline{AB}| + |\overline{CD}|}{2} = \frac{a + (2h - a)}{2} = h$$

□

Aufgabe 31.03 – MO621033. In der Ebene liegen zwei Quadrate $ABCD$ und $EFGH$ der Seitenlänge 1 derart, dass der Punkt F außerhalb des Quadrates $ABCD$, der Punkt B im Inneren der Strecke \overline{EF} und der Punkt C im Inneren der Strecke \overline{FG} liegt.

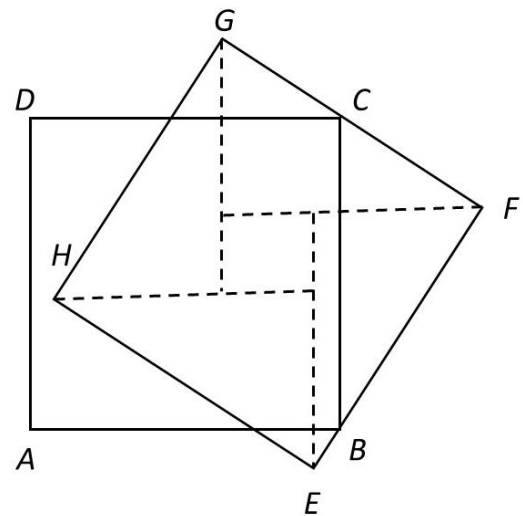
Ermitteln Sie, welche der folgenden Fälle unter den gegebenen Voraussetzungen eintreten können:

- Der Punkt H liegt im Inneren des Quadrates $ABCD$.
- Der Punkt H liegt auf dem Rand des Quadrates $ABCD$.
- Der Punkt H liegt außerhalb des Quadrates $ABCD$.

Die Antwort ist zu begründen.

Hinweis: Das Innere einer Strecke besteht aus allen Punkten der Strecke, die keine Endpunkte der Strecke sind; der Rand eines Quadrates besteht aus allen Punkten der vier Seiten, und das Innere eines Quadrats besteht aus allen Punkten der Quadratfläche, die keine Randpunkte sind.

Lösungshinweise: Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem so in die Ebene, dass A der Koordinatenursprung ist und B und D die Koordinaten $B(1; 0)$ und $D(0; 1)$ haben. Der Punkt C hat dann die Koordinaten $C(1; 1)$, der Punkt F habe die Koordinaten $F(x; y)$.



Das Dreieck $\triangle BFC$ ist rechtwinklig bei F , es gilt $0 < y < 1$, und die Hypotenusenabschnitte haben die Längen y und $1 - y$. Wegen des Höhensatzes hat die Höhe von F auf BC die Länge $\sqrt{y(1 - y)}$, und da F außerhalb des Quadrates $ABCD$ liegt, folgt $x = 1 + \sqrt{y(1 - y)}$. Aus dem Kathetensatz folgt $|\overline{BF}| = \sqrt{y}$ und $|\overline{CF}| = \sqrt{1 - y}$.

Mit Hilfe der Parallelen zur x -Achse durch H und durch F sowie der Parallelen zur y -Achse durch G und durch E zeichnen wir nun vier rechtwinklige Steigungsdreiecke in das Quadrat $EFGH$ ein⁵:

Mit Hilfe der Parallelen zur x -Achse durch H und durch F sowie der Parallelen zur y -Achse durch G und durch E zeichnen wir nun vier rechtwinklige Steigungsdreiecke in das Quadrat $EFGH$ ein⁵:

⁵ Die resultierende Zerlegung des Quadrats $EFGH$ ist für $y > \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $y < \frac{1}{2}$ unterschiedlich, dies spielt im Folgenden aber keine Rolle

Die Steigungsdreiecke haben die Hypotenusenlänge 1 und gleiche Winkel wie das Dreieck ΔBFC , sie sind also alle kongruent zum Dreieck ΔBFC . Somit ergeben sich die Koordinaten

$$E = \left(1 + \sqrt{y \cdot (1 - y)} - \sqrt{1 - y}; y - \sqrt{y}\right)$$

$$H = (h_x; h_y) = \left(1 + \sqrt{y \cdot (1 - y)} - \sqrt{1 - y} - \sqrt{y}; y - \sqrt{y} + \sqrt{1 - y}\right)$$

Es gilt $h_x = (1 - \sqrt{y}) \cdot (1 - \sqrt{1 - y})$, wegen $0 < y < 1$ folgt also $0 < h_x < 1$. Außerdem gilt $y < \sqrt{y}$ und $\sqrt{1 - y} < 1 - y$ und somit

$$h_y = y - \sqrt{y} + \sqrt{1 - y} < \sqrt{y} - \sqrt{y} + \sqrt{1 - y} < 1 - y < 1$$

$$h_y = y - \sqrt{y} + \sqrt{1 - y} > y - \sqrt{y} + 1 - y = 1 - \sqrt{y} > 0$$

also $0 < h_y < 1$. Der Punkt H liegt also im Inneren des Quadrats $ABCD$. \square

Vielleicht als Nachbereitung dieser Aufgabe, um den Umgang mit Koordinaten zu vertiefen, wurde im Folgejahr das Thema in Runde 1 erneut aufgegriffen.

Aufgabe 31.04 – MO631012. Gegeben sind vier Geraden durch ihre Gleichungen.

$$g_1: y = \frac{2}{9} \cdot x + \frac{5}{9},$$

$$g_2: y = \frac{7}{6} \cdot x - \frac{59}{6},$$

$$g_3: 7 \cdot x - 6 \cdot y = 8,$$

$$g_4: 2 \cdot x - 9 \cdot y = -56$$

Klassifizieren Sie das konvexe Vieleck so genau wie möglich, das durch die Schnittpunkte dieser vier Geraden bestimmt ist.

Hinweis: Klassifizieren bedeutet hier zu klären, wie viele Ecken das Vieleck hat und ob es besondere Eigenschaften bezüglich der Seiten oder Winkel gibt, so dass dem Vieleck eine besondere Bezeichnung (zum Beispiel: gleichseitiges Dreieck, Rechteck, gleichwinkliges Sechseck) zugewiesen werden kann.

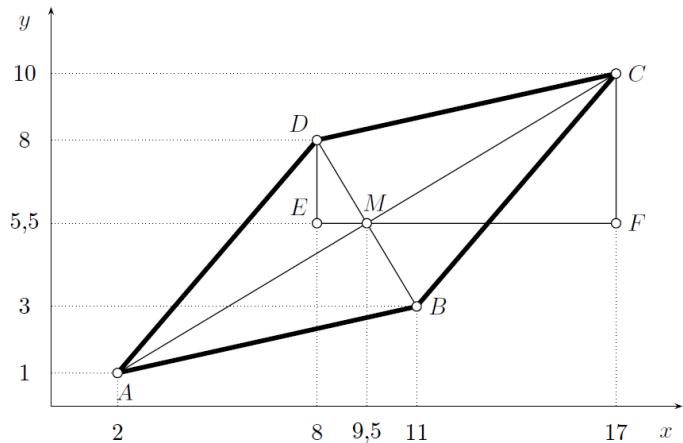
Lösungshinweise: Durch Umformen der Gleichungen von g_3 und g_4 erhalten wir für g_3 die Gleichung $y = \frac{7}{6} \cdot x - \frac{4}{3}$ und für g_4 folgt $y = \frac{2}{9} \cdot x + \frac{56}{9}$.

Wegen der jeweils gleichen Anstiege und der verschiedenen Schnittstellen mit der y -Achse gibt es zwei Paare zueinander paralleler Geraden: g_1 und g_4 sowie g_2 und g_3 . Daher gibt es genau vier Schnittpunkte, die ein Parallelogramm aufspannen.

Um entscheiden zu können, ob dieses Parallelogramm vielleicht noch besondere Eigenschaften hat, werden die Koordinaten der Schnittpunkte berechnet. Dazu sind

jeweils ein System aus zwei linearen Gleichungen in den zwei Unbestimmten x und y zu lösen⁶.

Wir erhalten, dass sich g_1 und g_3 in $A(2; 1)$, g_1 und g_2 in $B(11, 3)$, g_2 und g_3 in $C(17; 10)$ und g_3 und g_4 in $D(8; 8)$ schneiden. Die Diagonalen des Parallelogramms liegen dann auf der Geraden AC mit der Bezeichnung h und auf der Geraden BD , die wir mit k bezeichnen. Den Schnittpunkt der beiden Diagonalen nennen wir M .



Die Anstiege der Geraden h und k können aus den Koordinaten der Punkte, die auf ihnen liegen, berechnet werden. Wir erhalten für h den Anstieg $m_1 = \frac{10-1}{17-2} = \frac{3}{5}$ und für k den Anstieg $m_2 = \frac{8-3}{8-11} = -\frac{5}{3}$. Die Geraden h und k haben demzufolge die Gleichungen

$$h: y = \frac{3}{5} \cdot x - \frac{1}{5} \quad ; \quad k: y = -\frac{5}{3} \cdot x + \frac{64}{3}$$

woraus wir durch Schnittpunktberechnung die Koordinaten $M\left(\frac{19}{2}; \frac{11}{2}\right)$ erhalten.

Das Anstiegsdreieck $\triangle MFC$ der Geraden h hat den rechten Winkel bei F und die Kathetenlängen $|\overline{MF}| = 7,5$ und $|\overline{FC}| = 4,5$. Das Anstiegsdreieck $\triangle DEM$ der Geraden k hat den rechten Winkel bei E und Katheten der Längen $|\overline{DE}| = 2,5$ und $|\overline{EM}| = 1,5$. Diese sind genau ein Drittel Mal so lang wie die Kathetenlängen des Dreiecks $\triangle MFC$. Die Dreiecke $\triangle MFC$ und $\triangle DEM$ sind daher ähnlich. Da jeweils ein Schenkel der Winkel $\sphericalangle DME$ und $\sphericalangle FMC$ auf einer Parallelen zur x -Achse liegt und sich beide Winkel wegen der Rechtwinkligkeit der ähnlichen Anstiegsdreiecke zu 90° ergänzen, ist der Winkel $\sphericalangle CMD$ ein rechter Winkel. Die Geraden h und k stehen also senkrecht aufeinander. Damit ist das Parallelogramm $ABCD$ ein Rhombus (eine Raute, ein gleichseitiges Parallelogramm).

Hinweis: Zur Begründung der letzten Aussage überlegen wir uns, dass die Strecken \overline{AC} und \overline{BD} in M senkrecht aufeinander stehen und sich als Diagonalen im Parallelogramm halbieren. Sie zerlegen dadurch das Viereck $ABCD$ in vier kongruente

⁶ Die offiziellen Lösungshinweise zeigen, dass die Fertigkeiten beim Umgang in Koordinatensysteme erwartet werden. Da hier die Gleichungssysteme gelöst werden müssen, sollten diese Lösungsschritte auch ausführlich dargestellt werden.

Dreiecke. Daraus folgt dann, dass die Seiten gleich lang sind, also $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{CD}| = |\overline{DA}|$ gilt.

Die Orthogonalität von h und k folgt auch aus $m_1 \cdot m_2 = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = -1$.

Aufgaben im Koordinatensystem gab es bereits bei den ersten Wettbewerben. Allerdings wurde hier das Koordinatensystem nur verwendet, um die Lage der drei gegebenen Punkte zu beschreiben. Die geforderte Konstruktionsbeschreibung folgt elementar-geometrischen Zusammenhängen.

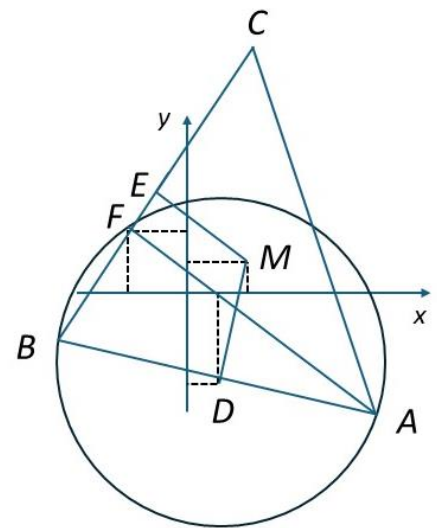
Aufgabe – V00912⁷. Es ist ein Dreieck zu konstruieren, für das die Koordinaten folgender Punkte gegeben sind:

- a) Fußpunkt F der Höhe $h_a = (-2; +2)$,
- b) Mittelpunkt D der Seite $\overline{AB} = c (+1; -3)$,
- c) Mittelpunkt M des Umkreises $(+2; +1)$.

Beschreiben Sie die Konstruktion! Messen Sie die Seiten des Dreiecks auf Millimeter genau! (1 cm \cong 1 Einheit im Koordinatensystem).

Konstruktionsbeschreibung:

- (1) Wir zeichnen die Punkte D, F, M in ein Koordinatensystem ein (gestrichelte Linien).
- (2) Der Höhenfußpunkt F liegt dann auf dem THALESkreis über \overline{AB} , d.h. auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt D und dem Radius gleich \overline{DF} . Wir zeichnen diesen Kreis.
- (3) Der Umkreismittelpunkt M liegt auf der Mittelsenkrechten von \overline{AB} . Wir zeichnen \overline{DM} und konstruieren dazu eine Senkrechte s .
- (4) Diese Senkrechte s schneidet den THALESkreis über \overline{AB} in den Punkten A und B . Wir konstruieren A und B .



- (5) Wir verbinden A mit dem Höhenfußpunkt F und konstruieren zu \overline{AF} eine Senkrechte (die laut Konstruktionsschritt (2) durch B geht). Auf dieser Senkrechten liegt der Mittelpunkt der Strecke \overline{BC} . Da M auf der Mittelsenkrechten von \overline{BC} liegt, erhalten wir den Mittelpunkt E der Strecke \overline{BC} , indem wir das Lot von M auf die Senkrechte durch F fallen. Der Lotfußpunkt ist E .

- (6) Der Punkt C ist dann das Ergebnis einer Punktspiegelung von B an E .

Die Längen der Dreiecksseiten betragen: $c = 11,7$ cm, $a = 12,3$ cm, $b = 13,3$ cm. \square

⁷ 1960 und 1961 wurden Vorolympiaden ausgerichtet, bevor im Schuljahr 1961/62 die Zählung der Mathematik-Olympiaden begann.

Aufgabe 31.05– MO080936. Es sei $ABCD$ ein Rechteck, und es sei P ein Punkt, der nicht notwendig in der Ebene des Rechtecks zu liegen braucht. P habe vom Eckpunkt A den Abstand a , vom Punkt B den Abstand b und vom Punkt C den Abstand c .

Man berechne den Abstand d des Punktes P vom Eckpunkt D und zeige dabei, dass zur Ermittlung dieses Abstandes d die Kenntnis der drei Abstände a, b, c ausreicht.

Lösungshinweise: Wir legen alle Punkte so in ein (dreidimensionales) kartesisches Koordinatensystem, dass o.B.d.A. $P(0,0)$ im Ursprung liegt, die Punkte A, B, C (und damit auch D) die gleiche z -Koordinate haben und die Rechteckseite \overline{AB} parallel zur x -Achse liegt. Betrachten wir zunächst den Eckpunkt A mit den Koordinaten $(a_x; a_y; z)$. Für den Abstand von P zu A gilt dann: $a^2 = a_x^2 + a_y^2 + z^2$ (dies erhalten wir geometrisch durch zweimalige Anwendung des Satzes des PYTHAGORAS im rechtwinkligen Dreieck $\triangle APP_0$, wobei P_0 der Fußpunkt des Lotes von P auf das Rechteck $ABCD$ sei).

Aufgrund der gewählten Lage des Rechtecks lauten die Koordinaten des Punktes $B(b_x; a_y; z)$, des Punktes $C(b_x; c_y; z)$ und des Punktes $D(a_x; c_y; z)$. Entsprechend finden wir für die Abstände

$$\begin{aligned} \text{von P zu B: } b^2 &= b_x^2 + a_y^2 + z^2 \\ \text{von P zu C: } c^2 &= b_x^2 + c_y^2 + z^2 \text{ und} \\ \text{von P zu D: } d^2 &= a_x^2 + c_y^2 + z^2. \end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} d^2 &= a_x^2 + c_y^2 + z^2 = a_x^2 + a_y^2 + z^2 + b_x^2 + c_y^2 + z^2 - b_x^2 - a_y^2 - z^2 \\ &= a^2 + c^2 - b^2 \end{aligned}$$

Also lässt sich der Abstand von P zu D eindeutig aus den Abständen a, b und c ermitteln. \square

Aufgabe 31.06 – MO210932. Ist $ABCD$ ein Rechteck, für dessen Seitenlängen $b = |\overline{AD}| = 6$ cm und $a = |\overline{AB}| > b$ gilt, so seien E, G diejenigen Punkte auf CD und F, H diejenigen Punkte auf AB , für die $AFED$ und $HBCG$ Quadrate sind.

Beweisen Sie bei diesen Bezeichnungen, dass es genau eine Seitenlänge a gibt, für die $EH \perp AC$ gilt, und ermitteln Sie diese Seitenlänge!

Lösungshinweise: Wir legen in die Ebene des Rechtecks derart ein Koordinatensystem, dass A im Koordinatenursprung $(0,0)$, B im Punkt $(a, 0)$ und D im Punkt $(0, b)$ zu liegen kommt. Dann gilt nach Konstruktion für die übrigen Punkte, dass sie folgende Koordinaten besitzen:

$$C(a, b), F(b, 0), E(b, b), H(a - b, 0), G(a - b, b).$$

Die Gerade AC hat den Anstieg $m_1 = \frac{b-0}{a-0} = \frac{b}{a}$.

Die Gerade EH den Anstieg $m_2 = \frac{b-0}{b-(a-b)} = \frac{b}{2b-a}$, sofern $a \neq 2b$ gilt.

Wäre $a = 2b$, so würde H mit F zusammenfallen, die Gerade EH wäre senkrecht zu AB , also insbesondere nicht senkrecht zu AC , so dass sich in diesem Fall keine Lösung ergibt. Wir können also im Weiteren $a \neq 2b$ annehmen.

Zwei nicht zu den Koordinatenachsen parallele Geraden stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn sich ihre Anstiege zu -1 multiplizieren, d.h., es ist

$$EH \perp AC \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \Leftrightarrow -1 = \frac{b}{2b-a} \cdot \frac{b}{a}$$

Aus der rechten Beziehung können wir a in Abhängigkeit von b ermitteln. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} b^2 &= a \cdot (a - 2b) = a^2 - 2ab && | + b^2 \\ 2b^2 &= a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 && | \text{ binomische Formel} \\ a - b &= b\sqrt{2} \Leftrightarrow a = b(1 + \sqrt{2}) && | \text{ unter Beachtung von } a > b > 0 \end{aligned}$$

Also existiert für festes b genau ein a , mit dem die beiden Geraden EH und AC senkrecht aufeinander stehen. Im konkreten Fall mit $b = 6$ cm ist dafür dann $a = (1 + \sqrt{2}) \cdot 6$ cm ≈ 14.5 cm. \square

Aufgabe 31.07 – MO220923. Von einem Quadrat $ABCD$ und vier Punkten P, Q, R, S wird folgendes vorausgesetzt:

- (1) P liegt auf der Strecke \overline{AB} zwischen A und B ,
- (2) Q liegt auf der Strecke \overline{BC} zwischen B und C ,
- (3) R liegt auf der Strecke \overline{CD} zwischen C und D ,
- (4) S liegt auf der Strecke \overline{DA} zwischen D und A ,
- (5) es gilt $PR \perp QS$.

Untersuchen Sie, ob für jede Lage der Punkte, bei der die Voraussetzungen (1) bis (5) erfüllt sind, stets dieselbe der drei Aussagen $|\overline{PR}| < |\overline{QS}|$, $|\overline{PR}| = |\overline{QS}|$, $|\overline{PR}| > |\overline{QS}|$ gilt! Wenn das der Fall ist, nennen Sie diese Aussage!

Lösungshinweise: Wir legen so ein Koordinatensystem in die Ebene des Quadrats, dass A im Koordinatenursprung $(0,0)$, B im Punkt $(1,0)$ und D im Punkt $(0,1)$ zu liegen kommen. Dann liegt C im Punkt $(1,1)$. Weiterhin existieren reelle Zahlen p, q, r, s , sodass P die Koordinaten $(p, 0)$, Q die Koordinaten $(1, q)$, R die Koordinaten $(r, 1)$ und S die Koordinaten $(0, s)$ besitzt.

Gilt dabei $p = r$, so liegt die Gerade PR parallel zur y -Achse und damit parallel zur x -Achse. Damit muss wegen (5) die Strecke \overline{QS} parallel zur x -Achse liegen, sodass $q = s$ gilt. Damit ergibt sich für beide Strecken eine Länge von

$$|\overline{PR}| = \sqrt{(r-p)^2 + (1-0)^2} = 1 = \sqrt{(1-0)^2 + (s-q)^2} = |\overline{QS}|$$

Gilt jedoch $p \neq r$, so hat die Gerade PR den Anstieg $m_1 = \frac{1-0}{r-p} = \frac{1}{r-p}$ und die Gerade QS den Anstieg $m_2 = \frac{s-q}{1-0} = s-q$.

Nach Aussage (5) stehen die beiden Geraden senkrecht aufeinander, so dass sich ihre Anstiege zu (-1) multiplizieren. Somit gilt $\frac{1}{r-p} \cdot (s-q) = -1$ bzw. $s-q = -(r-p)$, also $(s-q)^2 = (r-p)^2$. Für die Längen der Strecken \overline{PR} und \overline{QS} erhalten wir damit wieder

$$|\overline{PR}| = \sqrt{(r-p)^2 + (1-0)^2} = 1 = \sqrt{(1-0)^2 + (s-q)^2} = |\overline{QS}|$$

sodass in jedem Fall $|\overline{PR}| = |\overline{QS}|$ gilt. □

Bemerkung: Wir haben von den Bedingungen (1) bis (4) nur genutzt, dass die Punkte P bis S auf den angegebenen Geraden liegen. Damit kann die Zusatzvoraussetzung, die dort gefordert wird, dass die Punkte jeweils im Inneren der jeweiligen Quadratseiten liegen sollen, entfallen.

Aufgabe 31.08 – MO320924. Auf einer Geraden g seien A, B, C drei Punkte; B liege zwischen A und C . Über der Strecke \overline{AC} sei nach einer Seite von g das gleichseitige Dreieck $\triangle ACP$ errichtet, über die Strecken \overline{AB} und \overline{BC} nach der anderen Seite von g die gleichseitigen Dreiecke $\triangle ABQ$ und $\triangle BCR$.

Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen (bei jeder Wahl der Streckenlängen $|\overline{AB}| = a$ und $|\overline{BC}| = b$) die Mittelpunkte L, M bzw. N der Dreiecke $\triangle ACP$, $\triangle ABQ$ und $\triangle BCR$ stets die Ecken eines ebenfalls gleichseitigen Dreiecks sind!

Lösungshinweise: Wir legen ein Koordinatensystem in die Ebene, sodass A im Punkt $(-a, 0)$, B im Koordinatenursprung $(0, 0)$ und C im Punkt $(b, 0)$ liegt. In jedem gleichseitigen Dreieck mit Kantenlänge s besitzt die Höhe genau die Länge $s \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und fällt mit der Mittelsenkrechten der gegenüberliegenden Seite zusammen. Gleichzeitig fällt sie mit der entsprechenden Seitenhalbierenden zusammen, welche vom Schwerpunkt im Verhältnis $2 : 1$ geteilt wird, so dass der Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks auf der Mittelsenkrechten einer Seite in der Höhe von $s \cdot \frac{1}{6}\sqrt{3}$ liegt. Wenden wir dies auf die gegebene Situation an, so haben die Punkte L, M und N demnach die Koordinaten

$$|\overline{LM}|^2 = \left(\frac{b-a}{2} - \left(-\frac{a}{2} \right) \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (a+b) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a \right) \right)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (2a + b)\right)^2 \\
 &= \frac{b^2}{4} + \frac{3}{36} \cdot (4a^2 + 4ab + b^2) = \frac{1}{3} \cdot (a^2 + ab + b^2) \\
 |\overline{LN}|^2 &= \left(\frac{b-a}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (a+b) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot b\right)\right)^2 = \\
 &= \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (a+2b)\right)^2 \\
 &= \frac{a^2}{4} + \frac{3}{36} \cdot (a^2 + 4ab + 4b^2) = \frac{1}{3} \cdot (a^2 + ab + b^2) \\
 |\overline{MN}|^2 &= \left(-\frac{a}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a - \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot b\right)\right)^2 \\
 &= \left(-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (b-a)\right)^2 \\
 &= \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} + \frac{3}{36} \cdot (a^2 - 2ab + b^2) = \frac{1}{3} \cdot (a^2 + ab + b^2)
 \end{aligned}$$

Wir erhalten also $|\overline{LM}| = |\overline{LN}| = |\overline{MN}| = \sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$, so dass das Dreieck $\triangle LMN$ gleichseitig ist. \square

Aufgabe 31.09 – MO340943/MO341042. Auf der Seite AB des Quadrates $ABCD$ werde ein Punkt $X \neq A$ gewählt. Dann werde das Quadrat durch die Strecken \overline{AC} und \overline{XD} in vier Teilflächen zerlegt.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, die Wahl von X so zu treffen, dass es natürliche Zahlen p, q und r gibt, für die die Flächeninhalte dieser Teilflächen in geeigneter Reihenfolge im Verhältnis $1 : p : q : r$ stehen!

Lösungshinweise: Wir legen so ein Koordinatensystem in die Ebene des Quadrats, dass A im Koordinatenursprung $(0,0)$ liegt und C die Koordinaten $(1,1)$ besitzt. Dann liegt B bei $(1,0)$ und D bei $(0,1)$. Weiterhin sei $0 < a \leq 1$ eine reelle Zahl und der Punkt X habe die Koordinaten $(a, 0)$. Dann liegt X auf der Strecke \overline{AB} , ist aber verschieden von A .

Die Gerade XD lässt sich beschreiben durch die Funktionsgleichung

$$f(x) = \frac{0-1}{a-0} \cdot x + 1 = -\frac{1}{a} \cdot x + 1$$

und die Gerade AC durch $g(x) = x$. Für den Schnittpunkt S beider Geraden und den Koordinaten (x_S, y_S) gilt $f(x_S) = g(x_S)$, also $-\frac{1}{a} \cdot x_S + 1 = x_S$ bzw. $1 = \left(1 + \frac{1}{a}\right) \cdot x_S$ gleichbedeutend zu $y_S = x_S = \frac{a}{1+a}$.

Damit hat die Höhe h_a von S auf \overline{AB} die Länge $h_a = y_S = \frac{a}{a+1}$ und die Höhe h_d von S auf \overline{AD} die Länge $h_d = x_S = \frac{a}{a+1}$. Es ergibt sich für das Dreieck ΔASX der Flächeninhalt von

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AX}| \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{a+1} = \frac{a^2}{2 \cdot (a+1)}$$

und analog für das Dreieck ΔASD der Flächeninhalt

$$F_4 = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AD}| \cdot h_d = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{a}{a+1} = \frac{a}{2 \cdot (a+1)}$$

Da das Dreieck ΔACD den Flächeninhalt von $\frac{1}{2}$ besitzt und von der Strecke \overline{DS} in die beiden Dreiecke ΔASD und ΔDCS zerlegt wird, gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks ΔDCS

$$F_3 = \frac{1}{2} - F_4 = \frac{1}{2 \cdot (a+1)}.$$

Analog gilt für den Flächeninhalt des Vierecks $XBCS$

$$F_2 = \frac{1}{2} - F_1 = \frac{a+1-a^2}{2 \cdot (a+1)}.$$

Insgesamt ist also $F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = a^2 : (a+1-a^2) : 1 : a$.

Da $0 < a \leq 1$ ist, ist $1 \geq a \geq a^2$, damit auch $1 - a^2 \geq 0$ und damit $a+1-a^2 \geq a$. Also ist a^2 der kleinste der hier auftretenden Werte. Kürzen wir das Verhältnis mit a^2 , erhalten wir

$$F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = 1 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 1\right) : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a}.$$

Die Werte $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 1\right), \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}$ müssen dann in irgendeiner Reihenfolge den natürlichen Zahlen p, q und r entsprechen. Insbesondere muss also $0 < \frac{1}{a} = r$ eine natürliche Zahl, also $a = \frac{1}{r}$ sein. Dann ist aber

$$F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = 1 : (r + r^2 - 1) : r^2 : r$$

mit $p = r + r^2 - 1$ und $q = r^2$ von der gewünschten Form.

Zusammenfassend erhalten wir also genau dann ein Verhältnis der Flächeninhalte der vier Teilflächen, wie es von der Aufgabenstellung gefordert wird, wenn die Strecke \overline{AB} ein positives ganzzahliges Vielfaches der Strecke \overline{AX} ist bzw. $|\overline{AX}| = \frac{1}{r} \cdot |\overline{AB}|$ mit einer positiven ganzen Zahl r gilt. \square

Aufgabe 31.10 – MO141013. In einem kartesischen Koordinatensystem seien die Punkte $A(-\frac{1}{2}; 0)$ und $B(\frac{1}{2}; 0)$ gegeben.

- a) Beweisen Sie, dass es möglich ist, die Koordinaten von vier Punkten P_i ($i = 1, 2, 3, 4$) so anzugeben, dass für die Menge dieser vier Punkte die folgenden Bedingungen erfüllt sind!

- (1) Die Längen aller Strecken $\overline{AP_i}$ und $\overline{BP_i}$ sind ganzzahlig.
- (2) Es gibt keine Gerade, auf der drei der Punkte P_i liegen.

- b) Beweisen Sie, dass es keine Menge aus mehr als vier Punkten P_i mit den Eigenschaften (1) und (2) gibt!

Lösungshinweise: Angenommen, für einen Punkt P seien $|\overline{AP}| = a$ und $|\overline{BP}| = b$ ganzzahlig. Wegen $|\overline{AB}| = 1$ gilt dann nach der Dreiecksungleichung $a - 1 \leq b \leq a + 1$.

Ist $a - 1 = b$ oder $b = a + 1$, so bilden A, B, P kein Dreieck, sondern es gibt eine Gerade, die A, B und P enthält; dann liegt also P auf der x -Achse.

Ist $a - 1 < b < a + 1$, so folgt, da a, b ganzzahlig sind, $a = b$. Dann liegt P auf der Mittelsenkrechten von \overline{AB} , d. h. auf der y -Achse. Hieraus folgt bereits die Behauptung b), da unter den Punkten P_i einer Menge mit den Eigenschaften (1) und (2) höchstens zwei Punkte auf der x -Achse und höchstens zwei Punkte auf der y -Achse auftreten können.

Um a) nachzuweisen, genügt es, ein Beispiel anzugeben. Dies können wir folgendermaßen finden: Für einen Punkt $P(x, 0)$ auf der x -Achse sind

$$|\overline{AP}| = \left| x + \frac{1}{2} \right| \text{ und } |\overline{BP}| = \left| x - \frac{1}{2} \right|$$

genau dann ganzzahlig, wenn $x - \frac{1}{2} = m$ ganzzahlig ist, also $x = m + \frac{1}{2}$ mit ganzer Zahl m gilt. Für einen Punkt $P(0, y)$ auf der y -Achse ist

$$|\overline{AP}| = |\overline{BP}| = \sqrt{\frac{1}{4} + y^2} = n$$

genau dann ganzzahlig, wenn

$$y = \pm \sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}$$

mit ganzer Zahl n gilt. Daher erhalten wir z.B. dadurch vier derartige Punkte, dass wir $(x, 0)$ mit x wie oben für $m = -1$ und $m = 0$ sowie $(0, y)$ mit y wie oben für $n = 1$ wählen. In diesem Fall ergeben sich die Punkte

$$P_1\left(-\frac{1}{2}; 0\right) = A; P_2\left(\frac{1}{2}; 0\right) = B; P_3\left(0; \frac{1}{2}\sqrt{3}\right); P_4\left(0; -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right).$$

Diese erfüllen nach dem eben Gezeigten die Bedingung (1). Sie erfüllen aber auch die Bedingung (2), denn unter je dreien von ihnen gibt es zwei, deren Verbindungsgerade eine Koordinatenachse ist, die nicht durch den dritten geht. \square

In alten Mathe-Büchern geblättert

Der Begriff *kartesisches* Koordinatensystem bedeutet allgemein *von Cartesius eingeführt* und bezieht sich auf René Descartes (latinisiert *Renatus Cartesius*; geb. 1596, gest. 1650). Der französische Philosoph, Mathematiker und Naturwissenschaftler leistete u.a. Beiträge zur Geometrie: Er verknüpfte Geometrie und Algebra und gehört damit zu den Wegbereitern der analytischen Geometrie, die die rechnerische Lösung geometrischer Probleme ermöglicht. Allerdings hat er das Koordinatensystem nicht erfunden, jedoch dessen Konzept bekannt gemacht. In seinem Werk „La Géométrie“ aus dem Jahr 1637 demonstrierte er im ersten der drei Bücher, dass geometrische Probleme mit wesentlichen algebraischen Grundoperationen beschrieben werden können.

Die
Geometrie⁸
 von
 René Descartes.

Deutsch herausgegeben von
 Ludwig Schlesinger.

BERLIN.
 Mayer & Müller.
 1894.

Vorbemerkung.

Bisher war ich bestrebt, für Jedermann verständlich zu sein; aber von diesem Werke fürchte ich, dass es nur von solchen wird gelesen werden

^{8 8} s. <http://books.google.com>. Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten

können, die sich das, was in den Büchern über Geometrie enthalten ist, angeeignet haben; da diese manche sehr gut bewiesene Wahrheiten enthalten, schien es mir überflüssig, solche hier zu wiederholen, ich habe es aber darum nicht vermieden, mich ihrer zu bedienen.

Erstes Buch.
Über Probleme, die mit alleiniger Anwendung
von geraden Linien und Kreisen construiert
werden können.

Alle Probleme der Geometrie können leicht auf einen solchen Ausdruck gebracht werden, dass es nacher nur der Kenntniss der Länge gewisser gerader Linien bedarf, um dieselben zu construiren.

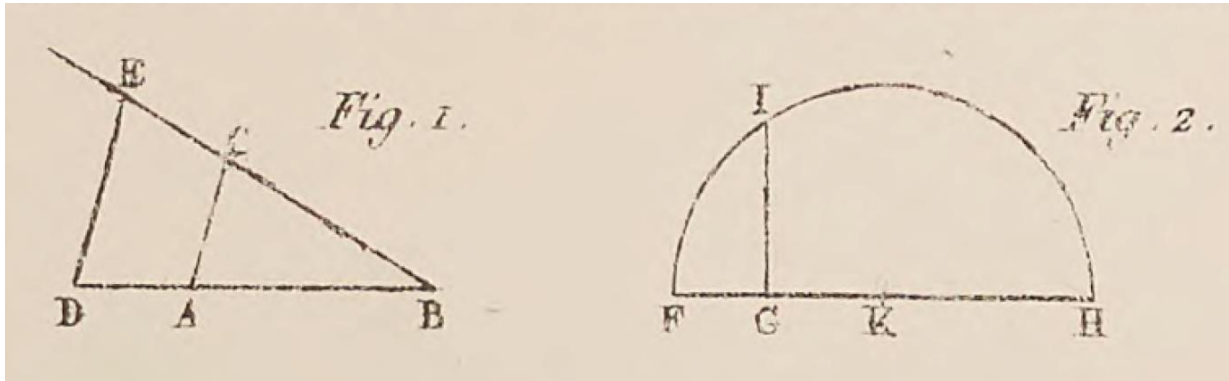
Und gleichwie sich die gesammte Arithmetik nur aus vier oder fünf Operationen zusammensetzt, nämlich aus den Operationen der Addition, der Subtraction, der Multiplication, der Division und des Ausziehens von Wurzeln, welches ja auch als eine Art von Division angesehen werden kann: so hat man auch in der Geometrie, um die gesuchten Linien so umzuformen, dass sie auf Bekanntes führen, nichts Anderes zu thun, als andere Linien ihnen hinzuzufügen oder von ihnen abzuziehen; oder aber, wenn eine solche gegeben ist, die ich, um sie mit den Zahlen in nähere Beziehung zu bringen, die Einheit nennen werde, und die gewöhnlich ganz nach Belieben angenommen werden kann, und man hat noch zwei andere, eine vierte Linie zu finden, welche sich zu einer dieser beiden verhält, wie die andere zur Einheit, was dasselbe ist, wie die Multiplication; oder aber eine vierte Linie zu finden, welche sich zu einer der beiden verhält, wie die Einheit zur anderen, was dasselbe ist wie die Division; oder endlich eine oder mehrere mittlere Proportionalen zu finden zwischen der Einheit und irgend welchen anderen Linien, was dasselbe ist wie das Ausziehen der Quadrat- oder Cubikwurzel u.s.w. – Und ich werde mich nicht scheuen, diese der Arithmetik entnommenen Ausdrücke in die Geometrie einzuführen, um mich dadurch verständlicher zu machen.

Sei z.B. (Fig. 1) AB die Einheit und es wäre BD mit BC zu multipliciren, so habe ich nur die Punkte A und C zu verbinden, dann DE parallel mit CA zu ziehen, und BE ist das Product dieser Multiplication.

Oder aber wenn man BE durch BD zu dividiren hätte, so wäre, nachdem die Punkte E und D verbunden und AC parallel mit DE gezogen worden ist, BC das Resultat dieser Division.

Soll endlich aus GH (Fig. 2) die Quadratwurzel ausgezogen werden, so füge ich zu GH in geradliniger Fortsetzung die Einheit FG hinzu, und beschreibe, nachdem ich FH im Punkte K in zwei gleiche Theile getheilt,

von K als Mittelpunkt aus den Kreis FJH , errichte dann in G unter rechtem Winkel zu FH eine gerade Linie bis nach J , so ist GJ die gesuchte Wurzel. Ich sage hier nichts über die Cubik- und anderen Wurzeln, da ich an späterer Stelle bequemer von denselben handeln kann.



Oftmals aber ist es gar nicht nöthig, diese Linien so auf's Papier zu zeichnen, sondern es genügt, sie jede einzeln mit einem Buchstaben zu bezeichnen. So nenne ich um die Linie BD zu GH hinzuzufügen, die eine a , die andere b und schreibe $a + b$; und $a - b$, um b von a abzuziehen; und ab , um sie mit einander zu multipliciren; und $\frac{a}{b}$, um a durch b zu dividiren; und aa oder a^2 um a mit sich selbst zu multipliciren, und a^3 , um dies noch einmal mit a zu multipliciren und so bis in's Unendliche; ...

Monatsaufgabe 03/2025⁹

Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Inkreismittelpunkt I . Der Inkreis ω von $\triangle ABC$ berühre die Seite \overline{BC} im Punkt D . Wir bezeichnen mit E und F diejenigen Punkte, für die sowohl $AI \parallel BE \parallel CF$ als auch $\sphericalangle BEI = \sphericalangle CFI = 90^\circ$ gelten. Die Geraden DE und DF schneiden ω jeweils ein weiteres Mal in den Punkten E' bzw. F' .

Zeige, dass $E'F' \perp AI$.

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 01/2025

Aufgabe I-1 (Individualwettbewerb der 18. MeMO, 2024, Szeged/Ungarn). Bestimme alle $k \in \mathbb{N}_0$, für die eine Funktion $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ existiert, die $f(2024) = k$ und $f(f(n)) \leq f(n+1) - f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt.

Bemerkung: Hierbei bezeichnet \mathbb{N}_0 die Menge nichtnegativer ganzer Zahlen.

Lösungshinweise: Wegen $0 \leq f(f(n)) \leq f(n+1) - f(n)$ ist die Funktion f nichtfallend. Wir zeigen nun, dass $f(n) \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

⁹ Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 30.04.2025 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Wir nehmen für einen indirekten Beweis an, es gelte $f(n) > n$, d.h. wegen der Ganzzahligkeit, $f(n) \geq n + 1$. Wegen der Monotonie von f führt dies zu $f(f(n)) \geq f(n + 1)$. Daraus folgt $f(n + 1) \leq f(f(n)) \leq f(n + 1) - f(n)$, was aber $f(n) \leq 0$ bedeutet – im Widerspruch zur Annahme $0 \leq n < f(n)$.

Es gilt also insbesondere $f(2024) \leq 2024$. Jedoch ist $f(2024) = 2024$ nicht möglich, denn die Gleichheit würde bedeuten:

$$f(f(2024)) = f(2024) = 2024 \leq f(2025) - f(2024) = f(2025) - 2024,$$

also $4048 \leq f(2025)$, im Widerspruch zu $f(2025) < 2025$.

Andererseits, für alle k mit $0 \leq k \leq 2023$ erfüllt die Funktion f mit

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \leq 2023 \\ k & \text{für } n \geq 2024 \end{cases}$$

die geforderte Bedingung, da $f(0) = f(k) = 0$ und somit $f(f(n)) = 0$ für alle $n \in N_0$. □

Termine

Wettbewerb „Jugend forscht“, Regionalwettbewerb Südwestsachsen, 07.03.2025 in Chemnitz, 13.00 – 17.00 Uhr, IHK Chemnitz

Wettbewerb „Jugend forscht“, Regionalwettbewerb Ostsachsen, 08.03.2025 in Dresden 14.00 – 18.30 Uhr, Sachsen Energie Dresden

7. Tag der Mathematik der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, Anmeldung bis 20.03.2025 unter <https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/tm/2025/index.php>

Känguru-Wettbewerb 2025 traditionell am dritten Donnerstag im März statt, also am 20. März 2025.

7. Tag der Mathematik der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz am 05.04.2025 im Zentralen Hörsaal- und Seminargebäude ("Orangerie"), Reichenhainer Straße 90, 09126 Chemnitz: u.a. mit Team-Wettbewerben für Klassenstufen 8-10 und 11/12, mit Fortbildungsvorträgen „Der rote Faden: Was hinter Schätzen und Testen steckt“ (Prof. Dr. OLIVER ERNST/TUC) und „Sichere medizinische Laserbehandlung und stabile Hochhäuser durch Optimale Steuerung“ (Jun.-Prof. Dr. MANUEL SCHALLER/TUC) sowie mit dem Plenarvortrag: „Mit Mathematik in die Zukunft schauen: Die Mathematik der Wittervorhersage“ (UNIV.-PROF. DR. MELINA FREITAG/Universität Potsdam).

Inhaltsverzeichnis

Vorwort.....	2
Thema 25.2 – Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken.....	3
Thema 31 – Lösungsstrategien im Koordinatensystem	7
In alten Mathe-Büchern geblättert	20
Monatsaufgabe 03/2025.....	22
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 01/2025	22
Termine.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2024/25)

Ausgabe ¹⁰	Nr.	Thema	Aufgabe
03/2025 (März)	Thema 31	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO640922
03/2025 (März)	Thema 25.2	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO641024
02/2025 (Feb.)	Thema 29.2	Schubfachprinzip	MO640924
02/2025 (Feb.)	Thema 24.3	Kombinatorik	MO610935
01/2025 (Jan.)	Thema 24.2	Kombinatorik	MO641023 MO640923
12/2024 (Dez.)	Thema 30	Diophantische Gleichungen	MO641011
11/2024 (Nov.)	Thema 19.2	Maximale Eigenschaften ebener Figuren	MO641012
11/2024 (Nov.)	Thema 03	Gleichungssysteme	MO641015
11/2024 (Nov.)	Thema 22	Zahlenverteilungen auf Figuren	MO641016
10/2024 (Okt.)	Thema 04.3	Flächenberechnung	
09/2024 (Sept.)		Binomialkoeffizienten	MO631045
	Thema 04.2	Flächenberechnung	MO630946
08/2024 (Aug.)	Thema 29.1	Schubfachprinzip	MO631041
			MO630941
			MO630934

Impressum

Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
 Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
 E-Mail: bin0@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de

Auflage: digital, auf Anfrage auch Papiaerausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

¹⁰ Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bin0@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter <https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben> erhältlich.