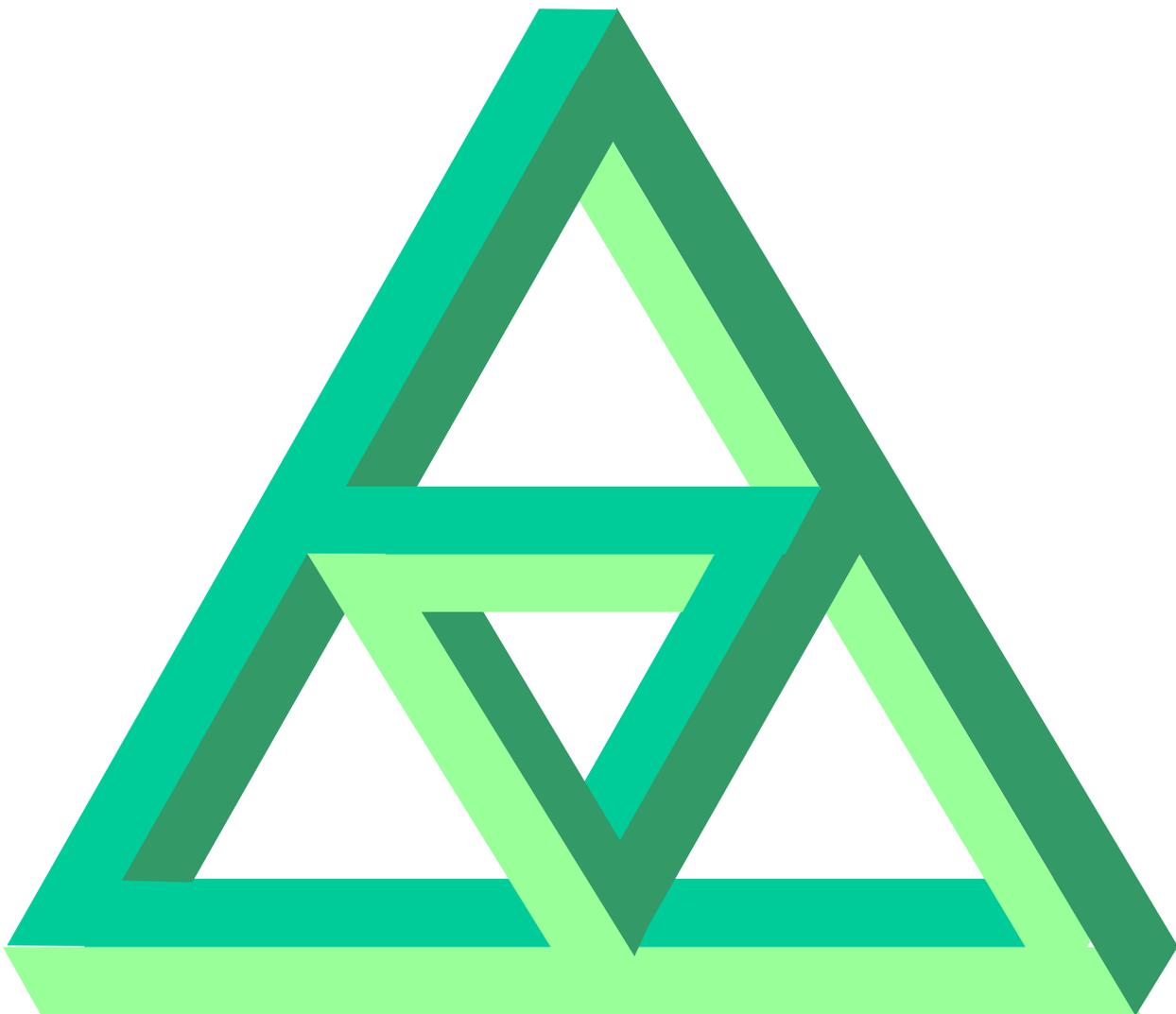


# Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –

---



## Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben<sup>1</sup> thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10<sup>2</sup> haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Ein wesentlicher Schluss im Beweis der Aufgabe zum Jahreswechsel basiert auf dem Schubfachprinzip. Aber auch in der aktuellen Aufgabe **MO640924** können wir dieses allgemeingültige Prinzip wirkungsvoll einsetzen.

Wir setzen die Diskussion zum Thema „Kombinatorik“ fort und betrachten Aufgaben, die sich auf den Begriff der (klassischen) Wahrscheinlichkeit beziehen. Derartige Problemstellungen waren für die Klassenstufe 12 schon bei den frühen Mathematik-Olympiaden präsent. Zur 32. MO finden wir erstmalig die Begriffe Zufall und Wahrscheinlichkeit auch in einer Aufgabe für die Klassenstufe 10. Seitdem werden kombinatorische Fragestellungen mitunter so verpackt, letztmalig mit der Aufgabe **MO610935**.

Die Aufgaben **MO630943/MO631042** lassen sich auf die Catalanische Vermutung zurückführen. Wer diese Aussage kannte (die bereits 1844 publiziert, aber erst 2002 bewiesen wurde), war offensichtlich für die Lösungsfindung im Vorteil. Da in der Aufgabenstellung nicht ausdrücklich die Anwendung bekannter Sätze ausgeschlossen wurde, waren Lösungen mit Bezug zu solchen Aussagen als vollständig anzuerkennen, auch wenn die von der Aufgabenkommission erwartete Lösungsidee viel aufwändiger war. Unter der Rubrik „In alten Mathe-Büchern geblättert“ zeigen wir die vierzeilige Notiz von 1844, in der die Catalanische Vermutung publiziert wurde.

---

<sup>1</sup> [www.mathematik-olympiaden.de](http://www.mathematik-olympiaden.de)

<sup>2</sup> [https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no\\_cache=1](https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1)

## Thema 29.2 – Schubfachprinzip

In Heft 08/2024 wurde das Schubfachprinzip erläutert und seine vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten anhand von Aufgaben diskutiert. Während bei den Aufgaben **MO630941/MO631041** die Lösungsidee maßgeblich auf diesem Prinzip basierte, hilft oftmals der Hinweis darauf, einen Zwischenschritt in der Beweisführung zu begründen. So auch in der Aufgabe zum Jahreswechsel:

**Aufgabe 29.09 – MO251046.** Es sei  $F = (a_1, a_2, a_3, \dots)$  diejenige unendliche Folge natürlicher Zahlen, die durch die Festsetzungen (1), (2) definiert ist:

- (1) Die ersten vier Glieder der Folge  $F$  lauten  $a_1 = 2, a_2 = 0, a_3 = 2, a_4 = 5$ ; sie bilden also die Teilfolge  $(2, 0, 2, 5)$ .
- (2) Für jedes  $n \geq 5$  ist  $a_n$  die Einerziffer der Summe der vier Glieder, die dem Glied  $a_n$  in der Folge  $F$  unmittelbar vorangehen.

Man untersuche, ob es in der Folge  $F$  außer der Teilfolge  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  noch eine weitere Teilfolge gibt, die aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden Gliedern von  $F$  besteht und  $(2, 0, 2, 5)$  lautet.

*Lösungshinweise:* Alle Glieder der Folge  $F$  sind (weil Einerziffer einer Zahl) Zahlen kleiner als 10. Es gibt aber nur endlich viele 4-Tupel solcher Zahlen, nämlich  $10^4$ . **Nach dem Schubfachprinzip<sup>3</sup>** muss es in einer unendlichen Folge mindestens ein 4-Tupel geben, das mehrfach vorkommt (sogar unendlich oft vorkommt). Es gibt also zwei Indizes  $k$  und  $m$  ( $k < m$ ) mit

$$a_k = a_m, a_{k+1} = a_{m+1}, a_{k+2} = a_{m+2}, a_{k+3} = a_{m+3}$$

Wir wissen, dass sowohl  $a_{k+4}$  als auch  $a_{m+4}$  die Einerziffer der Summe aus den davorliegenden 4 Folgengliedern ist, so dass auch  $a_{k+4} = a_{m+4}$  folgt. Das können wir nun fortsetzen und erkennen, dass sich ab  $a_k$  bis  $a_{m-1}$  die Folgenglieder periodisch wiederholen, denn wir können diese Betrachtung statt mit  $k$  auch mit  $k + 1, k + 2, \dots$  fortsetzen.

Wir vermuten, dass sich diese Eigenschaft auch in die andere Richtung fortsetzen lässt. Wir betrachten entsprechend der Bildungsvorschrift die Summen

$$\begin{aligned} a_{k-1} + a_k + a_{k+1} + a_{k+2} &= 10x + a_{k+3} \\ a_{m-1} + a_m + a_{m+1} + a_{m+2} &= 10y + a_{m+3} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} a_{k-1} &= 10x + a_{k+3} - a_k - a_{k+1} - a_{k+2} \\ a_{m-1} &= 10y + a_{m+3} - a_m - a_{m+1} - a_{m+2} \end{aligned}$$

<sup>3</sup> Auch wenn die folgende Aussage einsichtig erscheint, würde bei Fehlen dieses Hinweises die Nachfrage nach einer Begründung gerechtfertigt sein.

wobei  $x$  und  $y$  geeignete Zehnerziffern darstellen, die jeweils als Summe von 4 einstelligigen Zahlen einen der Werte 0, 1, 2 oder 3 annehmen können. Da in beiden Gleichungen die Terme mit den Variablen  $a$  übereinstimmen, beschränken wir unsere Betrachtung auf die Terme  $10x + z$  und  $10y + z$  mit

$$z = a_{k+3} - a_k - a_{k+1} - a_{k+2} = a_{m+3} - a_m - a_{m+1} - a_{m+2}$$

Wir nehmen an, es sei  $x \neq y$  und o.B.d.A.  $x < y$ , also  $y \geq x + 1$ . Wir erhalten folglich  $a_{m-1} = 10y + z \geq 10(x + 1) + z = 10x + z + 10 \geq a_{k-1} + 10$  im Widerspruch zu  $a_{m-1} < 10$ . Also stimmen  $x$  und  $y$  und deshalb auch  $a_{k-1}$  und  $a_{m-1}$  überein. Auch diese Argumentation können wir fortsetzen und haben bewiesen, dass die periodische Wiederholung bereits ab  $k = 1$  bis  $k = m - 1$  zu beobachten ist. Also gibt es tatsächlich eine (und sogar unendlich viele) Teilfolgen  $(2, 0, 2, 5)$  in der Folge  $F$ . □

*Ergänzung:* Die Aufgabe stammt aus der MO im Jahr 1986. Es wurde damals natürlich die Startfolge  $(1, 9, 8, 6)$  vorgegeben. Als Nachtrag zum Lösungsvorschlag wurde informiert, dass für  $m = 1561$  die Teilfolge erstmalig in  $F$  wieder erscheint. Die Periode umfasst also 1560 verschiedene 4-gliedrige Teilfolgen.

Es ist nicht schwer, computergestützt für jeder Startfolge die Länge der Periode zu ermitteln. Überraschend stellen wir fest, dass wir auch für die Startfolge  $(2, 0, 2, 5)$  den Wert  $m = 1561$  erhalten. Wir nehmen dies zum Anlass, den Einfluss der Startfolgen genauer zu untersuchen:

*Fall 1:* Die Startfolge  $(0, 0, 0, 0)$  führt zur Folge identisch 0.

*Fall 2:* Sind alle Glieder der Startfolge geradzahlig, so sind auch alle Folgenglieder von  $F$  geradzahlig. Es gibt außer  $(0, 0, 0, 0)$  insgesamt  $5^4 - 1 = 624$  verschiedene 4-gliedrige Teilfolgen mit geradzahligem Gliedern. Wir stellen fest, dass  $(0, 0, 0, 2)$  und  $(0, 0, 2, 0)$  zu zwei unterschiedlichen Folgen jeweils mit Periodenlänge 312 führen.

*Fall 3:* Sind in der Startfolge außer 0 nur die Ziffern 5 enthalten, so führen  $(0, 0, 0, 5)$ ,  $(0, 0, 5, 0)$  und  $(5, 5, 5, 5)$  zu drei unterschiedlichen Folgen jeweils mit der Periodenlänge 5.

*Fall 4:* Sind in der Startfolge ein ungerades Glied und drei gerade Glieder, so besteht jeder 4-gliedrige Teilfolge von  $F$  aus einem ungeraden Glied und drei geraden Gliedern oder aus zwei ungeraden und zwei geraden Gliedern. Wir finden, dass zu den Startfolgen  $(0, 0, 0, 1)$ ,  $(0, 0, 1, 0)$  und  $(0, 1, 0, 0)$  drei verschiedene Folgen  $F$  jeweils mit Periodenlänge 1560 gehören. (Die Startfolge  $(1, 0, 0, 0)$  führt bereits nach dem ersten Schritt auf  $(0, 0, 0, 1)$ ).

*Fall 5:* Sind in der Startfolge drei ungerade Glieder und ein gerades Glied, so besteht jeder 4-gliedrige Teilfolge von  $F$  aus drei ungeraden Gliedern oder aus vier ungeraden

Gliedern. Wir finden, dass zu den Startfolgen  $(0, 1, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1, 1)$  und  $(1, 1, 1, 0)$  drei verschiedene Folgen  $F$  jeweils mit Periodenlänge 1560 führen. (Die Startfolge  $(1, 1, 0, 1)$  führt bereits nach dem 920 Schritten auf  $(1, 0, 1, 1)$ ).

Fassen wir die fünf Fälle zusammen, so erhalten wir als Anzahl der erfassten Teilfolgen

$$1 + 2 \cdot 312 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 1560 + 3 \cdot 1560 = 10000,$$

d.h., es sind alle möglichen 4-gliedrigen Teilfolgen und die Fallunterscheidung ist vollständig.

Aber auch in aktuellen Aufgaben erweist sich das Schubfachprinzip als hilfreich:

**Aufgabe 29.10 – MO640924.** Gegeben seien zwei Mengen  $A$  und  $B$  aus positiven ganzen Zahlen. Aus diesen beiden Mengen bilden wir eine neue Menge, indem wir alle Zahlen der beiden Mengen  $A$  und  $B$  für diese neue Menge auswählen und zusätzlich noch alle möglichen Summen von einer Zahl aus  $A$  und einer Zahl aus  $B$  hinzufügen. Bezeichnet man die so gebildete Menge mit  $A + B$ , so kommt das Gesagte in  $A + B = A \cup B \cup \{a + b \text{ mit } a \in A, b \in B\}$  zum Ausdruck.

a) In diesem Aufgabenteil betrachten wir zwei spezielle Mengen für  $A$  und  $B$ :

$$\begin{aligned} A &= \{3 \cdot k - 1 \text{ mit } k = 1, 2, 3, \dots\} = \{2, 5, 8, 11, 14, \dots\} \\ B &= \{5 \cdot m - 4 \text{ mit } m = 1, 2, 3, \dots\} = \{1, 6, 11, 16, 21, \dots\} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass  $A + B$  die Menge aller positiven ganzen Zahlen außer 4, 7 und 10 ist, also  $A + B = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, \dots\}$  gilt.

b) In diesem Aufgabenteil betrachten wir zwei beliebige Mengen  $A$  und  $B$  positiver ganzer Zahlen und untersuchen die Menge  $A + B$ . Dazu bezeichnen wir mit  $a(n)$  und  $b(n)$  die Anzahl der Elemente aus  $A$  bzw.  $B$ , die nicht größer als  $n$  sind.

Zeigen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussage für jede positive ganze Zahl  $n$ . Gilt die Ungleichung  $a(n) + b(n) \geq n$ , so ist  $n$  ein Element von  $A + B$ .

*Hinweis zur Aufgabenstellung:* Die Objekte in einer Menge (in unserer Aufgabe sind es Zahlen) heißen Elemente und werden als paarweise verschieden angenommen. Mehrfachnennungen von Elementen spielen dabei keine Rolle bei der Beschreibung einer Menge. Ebenso spielt es keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Elemente einer Menge angegeben werden. So beschreiben  $\{4, 6\}$ ,  $\{6, 4\}$  und  $\{4, 6, 4\}$  alle die Menge aus den zwei Elementen 4 und 6, also  $\{4, 6\} = \{6, 4\} = \{4, 6, 4\}$ .

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe Teil a):* Wir bestimmen zunächst explizit alle Zahlen kleiner als 11 in  $A + B$ . Einige dieser Zahlen stammen direkt aus  $A$ , was die Elemente 2, 5 und 8 liefert, bzw. direkt aus  $B$ , was die Elemente 1 und 6 liefert. Alle übrigen

Zahlen kleiner als 11 in  $A + B$  sind die Summe einer Zahl kleiner als 10 aus  $A$  und einer Zahl kleiner als 10 aus  $B$ , was durch systematisches Probieren zusätzlich die Summen  $2 + 1 = 3$ ,  $2 + 6 = 8$ ,  $5 + 1 = 6$ ,  $5 + 6 = 11$ ,  $8 + 1 = 9$  und  $8 + 6 = 14$  liefert. Zusammenfassend haben wir damit  $1, 2, 3, 5, 6, 8, 9 \in A + B$  und  $4, 7, 10 \notin A + B$ .

Es bleibt zu zeigen, dass alle positiven ganzen Zahlen  $n \geq 11$  Elemente von  $A + B$  sind. Jede solche Zahl lässt sich als  $3k - 1$ ,  $3k$  oder  $3k + 1$  für eine positive ganze Zahl  $k \geq 4$  schreiben.

*Fall 1:*  $n = 3k - 1$ . Dann ist  $n$  ein Element von  $A$  und damit auch von  $A + B$ .

*Fall 2:*  $n = 3k$ . Dann lässt sich  $n$  als Summe  $n = (3k - 1) + 1$  mit  $3k - 1 \in A$  und  $1 \in B$  schreiben, womit  $n \in A + B$  ist.

*Fall 3:*  $n = 3k + 1$ . Dann lässt sich  $n$  als Summe  $n = (3k - 10) + 11$  schreiben, wobei  $3k - 10 = 3(k - 3) - 1 \in A$  und  $11 \in B$  erfüllt ist, also  $n \in A + B$  ist.

*Ergänzung zur Übung (aufgrund des höheren Aufwandes bei gleicher Lösungsidee sollte es nicht als Lösungsvariante verstanden werden):* Da  $A$  und  $B$  inhaltlich gleichberechtigt in die Aufgabenstellung einfließen, sollte die Argumentation auch aus Sicht der Menge  $B$  gelingen. Dafür wissen wir, dass sich jede Zahl  $n \geq 11$  als  $5k - 4$ ,  $5k - 3$ ,  $5k - 2$ ,  $5k - 1$  oder  $5k$  für eine positive ganze Zahl  $k \geq 3$  darstellen lässt.

*Fall 1:*  $n = 5k - 4$ . Dann ist  $n$  ein Element von  $B$  und damit auch von  $A + B$ .

*Fall 2:*  $n = 5k - 3$ .  $n$  lässt sich als Summe  $n = (5k - 14) + 11 = 5(k - 2) - 4 + 11$  mit  $11 \in A$  und  $5(k - 2) - 4 \in B$  schreiben, womit  $n \in A + B$  ist.

*Fall 3:*  $n = 5k - 2$ .  $n$  lässt sich als Summe  $n = (5k - 4) + 2$  mit  $2 \in A$  und  $5k - 4 \in B$  schreiben, womit  $n \in A + B$  ist.

*Fall 4:*  $n = 5k - 1$ .  $n$  lässt sich als Summe  $n = (5k - 9) + 8 = 5(k - 1) - 4 + 8$  mit  $8 \in A$  und  $5(k - 1) - 4 \in B$  schreiben, womit  $n \in A + B$  ist.

*Fall 5:*  $n = 3k$ .  $n$  lässt sich als Summe  $n = (5k - 14) + 14 = 5(k - 2) - 4 + 14$  mit  $14 \in A$  und  $5(k - 2) - 4 \in B$  schreiben, womit  $n \in A + B$  ist.

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe b):* Für  $n = 1$  folgt aus  $a(1) + b(1) \geq 1$ , dass 1 in  $A$  oder  $B$ , also auch in  $A + B$  vorkommt, daher dürfen wir  $n > 1$  annehmen.

Falls  $n \in A$  oder  $n \in B$  gilt, so ist auch  $n \in A + B$ . Sei daher im Folgenden  $n \notin A$  und  $n \notin B$ . Wir betrachten nun die  $n - 1$  Paare

$$(1, n - 1), (2, n - 2), (3, n - 3), \dots, (n - 2, 2), (n - 1, 1),$$

also die  $n - 1$  Paare  $(k, n - k)$  für  $k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ . Für jedes dieser Paare  $(k, n - k)$  markieren wir die erste Komponente  $k$ , falls  $k \in A$ , und die zweite Komponente  $n - k$ , falls  $n - k \in B$ . Es wurden dann insgesamt

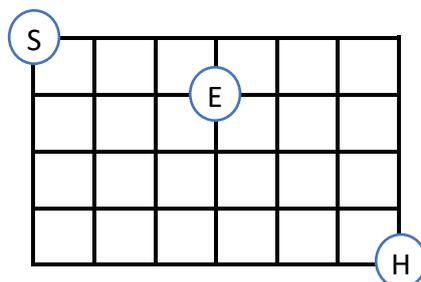
$$a(n - 1) + b(n - 1) = a(n) + b(n) \geq n$$

Komponenten dieser  $n - 1$  Paare markiert. Damit muss es **nach dem Schubfachprinzip** aber ein Paar  $(k, n - k)$  geben, in dem beide Komponenten markiert wurden. Für dieses Paar  $(k, n - k)$  gilt dann  $k \in A$  und  $n - k \in B$ , womit  $n = k + (n - k) \in A + B$  folgt, was zu zeigen war.  $\square$

### Thema 24.3 – Kombinatorik<sup>4</sup>: klassische Wahrscheinlichkeit

Unter der klassischen Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird der Quotient aus der Anzahl der für das Ereignis günstigen Fälle und der Anzahl aller möglichen Fälle verstanden. Erstmals in der Klassenstufe 9/10 wurde dieser Hintergrund in der 32. MO verwendet, ohne es allerdings im Aufgabentext so zu benennen.

**Aufgabe 24.15 – MO321045.** In der Abbildung wird ein Stadtteil skizziert; die Linien stellen die Straßen dar. Robert wählt für seinen Weg von der Schule  $S$  nach Hause  $H$  an jedem Schultag einen der möglichst kurzen Wege.



Kommt er an die Ecke  $E$ , so kauft er sich ein Eis. Auf die Bitte, dies möge nicht zu oft vorkommen, vereinbart er, an jeder (für möglichst kurze Wege) möglichen Abzweigung durch Zufall zu entscheiden, welche der zwei zu wählenden Richtungen er einschlägt, das heißt so, dass jede dieser zwei Richtungen, unabhängig von der vorher getroffenen Entscheidung, im Durchschnitt gleich oft vorkommt.

Nach so langer Zeit, dass derartige Zufallsaussagen sinnvoll sind, stellt sich heraus: Robert hat im Durchschnitt an einem Drittel aller Schultage ein Eis gekauft.

- Er erklärt dazu: "Mehr als ein Drittel aller möglichst kurzen Wege von  $S$  nach  $H$  führen über die Ecke  $E$ ." Trifft das zu?
- Seine Mutter meint: "Dennoch müsste - bei Zufallsentscheidungen im vereinbarten Sinn - durchschnittlich an weniger als einem Drittel aller Schultage der Weg über  $E$  führen." Trifft das zu?

<sup>4</sup> s. Teil 1, Heft 8+9/2023, Teil 2: Heft 1/2025

*Lösungshinweis zu Teilaufgabe a):* Um auf einem möglichst kurzen Weg nach Hause zu kommen, muss er – in beliebiger Reihenfolge – 6 Wegstücke nach rechts und 4 nach unten zurücklegen. Dafür gibt es

$$\binom{6+4}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210$$

Möglichkeiten, sodass Robert genauso viele Wege prinzipiell zur Verfügung hat.

Bei  $E$  kommt er nur genau dann vorbei, wenn unter den ersten vier Wegstücken genau eines nach unten dabei war. Dafür gibt es  $\binom{4}{1} = 4$  mögliche Wege von  $S$  nach  $E$ . Um nach dem Eiskauf noch nach Hause zu kommen, müssen weitere 3 Wegstücke nach rechts und 3 nach unten zurückgelegt werden, wofür es

$$\binom{3+3}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

Möglichkeiten gibt, sodass genau  $4 \cdot 20 = 80 > 70 = \frac{1}{3} \cdot 210$  möglichst kurze Wege von  $S$  nach  $H$  über  $E$  führen. Robert hat also mit seiner Aussage recht.

*Lösungshinweise zu Teilaufgabe b):* Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass Robert durch Zufallsentscheidungen von  $S$  nach  $E$  gelangt, genügt es, die Wahrscheinlichkeit für jeden dieser Wege von  $S$  nach  $E$  zu bestimmen und diese zu addieren. Jeder dieser Wege besitzt eine Länge von 4 und tatsächlich ist sowohl zu Beginn als auch an jedem Zwischenpunkt eine Entscheidung zu treffen, da an jeder dieser Stelle zwei mögliche Fortsetzungen für kürzeste Wege nach  $H$  existieren. Also hat jeder dieser Wege eine Wahrscheinlichkeit von  $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ , sodass Robert nur mit einer Wahrscheinlichkeit von  $4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$  in  $E$  vorbeikommen dürfte. Roberts Mutter hat also mit ihrer Aussage auch recht.  $\square$

*Bemerkung der MO-Aufgabenkommission:* Der Unterschied kommt dadurch zu Stande, dass die weiteren Wege, die nach  $H$  führen, nicht gleichwahrscheinlich sind, da nicht gleich viele Entscheidungen zu treffen sind: Ab Erreichen des rechten bzw. unteren Rands ist der Restweg eindeutig vorgegeben. Erreicht man diesen früher, ist der entsprechende Weg also aufgrund geringerer Anzahl an zu treffenden Entscheidungen also wahrscheinlicher.

Aufgaben zur klassischen Wahrscheinlichkeit wurden dagegen in der Klassenstufe 12 schon seit der 5. MO häufig gestellt:

**Aufgabe 24.16 – MO051214.** Klaus und Dieter vereinbaren das folgende Spiel: Klaus nimmt 6 Bindfäden gleicher Länge in eine Hand, so dass an jeder Seite der Faust sechs Bindfadenenden herausragen. Dieter wird aufgefordert, die Enden auf jeder Seite paarweise zusammenzuknüpfen. Stellt sich beim Öffnen der Hand heraus, dass die

Bindfäden einen einzigen Ring bilden, so hat Dieter gewonnen, anderenfalls gewinnt Klaus.

Wer von beiden hat die größeren Gewinnchancen? Stellen Sie dazu folgende Überlegungen an!

- a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten  $m$ , die Bindfadenenden zu verknüpfen, gibt es überhaupt?
- b) In wie vielen Fällen  $r$  erhält man einen einzigen Ring?
- c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit  $w$ , dass ein einziger Ring entsteht?

*Bemerkung:*  $w$  ist definiert als  $\frac{r}{m}$ , wobei  $m$  und  $r$  in a) und b) erklärt sind.

*Lösungshinweise zu Teilaufgabe a):* Die Enden seien auf einer Seite gemäß der Aufgabenstellung verbunden, z.B. o.B.d.A. 1 mit 2, 3 mit 4, 5 mit 6. Auf der anderen Seite hat man für das erste Ende 5 Möglichkeiten durch Verbindung. Danach kann eines der vier freien Enden mit irgendeinem der drei anderen Enden verbunden werden. Für die restlichen zwei Enden bleibt nur noch eine Möglichkeit. Die Zahl der möglichen Fälle ist also  $m = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$ .

*Lösungshinweise zu Teilaufgabe b):* Verknüpfung auf der einen Seite wie unter a). Als Resultat kann dann und nur dann ein einziger Ring entstehen, wenn auf der anderen Seite 1 mit 3, 4, 5 oder 6 verknüpft wird.

Nehmen wir an, dass 1 mit 3 verknüpft ist. In diesem Fall entsteht genau dann ein einziger Ring, wenn 2 mit 5 oder 6 verbunden wird. Entsprechend gibt es in jedem der anderen Fälle, nämlich dass 1 mit 4, 5 oder 6 verbunden ist, genau zwei Möglichkeiten, einen einzigen Ring erzeugen. Die Zahl der günstigen Fälle, in denen ein einziger Ring entsteht, ist danach  $r = 4 \cdot 2 = 8$ .

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe c):* Die Wahrscheinlichkeit ist

$$w = \frac{r}{m} = \frac{8}{15} = 0.533 \dots$$

Dieter hat also die größeren Gewinnchancen. □

**Aufgabe 24.17 - 111236B.** 50 weiße und 50 schwarze Kugeln sind so in zwei äußerlich nicht unterscheidbare Urnen zu verteilen, dass keine Urne leer bleibt und alle Kugeln verwendet werden.

Wie ist die Aufteilung der Kugeln auf die beiden Urnen vorzunehmen, wenn die Wahrscheinlichkeit, beim (blindlings erfolgenden) einmaligen Wählen einer der beiden Urnen und Ziehen einer Kugel aus ihr eine weiße Kugel zu ergreifen, so groß wie möglich ausfallen soll?

*Hinweise zur Aufgabenstellung:*

1. In der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung wird die Wahrscheinlichkeit  $p$  eines Ereignisses als Quotient aus der Anzahl  $g$  der für dieses Ereignis "günstigen" Fälle und der Gesamtzahl  $m$  aller möglichen Fälle definiert, also  $p = \frac{g}{m}$  gesetzt.

2. Somit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, aus einer Urne, die insgesamt  $u$  Kugeln und darunter  $w$  weiße enthält, (blindlings) eine weiße Kugel zu ziehen, als  $p = \frac{w}{u}$  anzusetzen.

3. Sind zwei Urnen vorhanden, bei denen die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen Kugel  $p_1$  bzw.  $p_2$  betragen, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für das zusammengesetzte Ereignis "Auswahl einer der beiden Urnen und Ziehen einer weißen Kugel aus der gewählten Urne" zu  $p = \frac{1}{2} \cdot p_1 + \frac{1}{2} \cdot p_2$ .

*Lösungshinweise:* Es seien  $w$  und  $s$  die Anzahlen der weißen bzw. schwarzen Kugeln, die in Urne 1 gelegt werden. Nach Voraussetzung ist dann  $(w, s) \neq (0, 0)$  und  $(w, s) \neq (50, 50)$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass eine aus Urne 1 bzw. Urne 2 gezogene Kugel weiß ist, beträgt  $p_1(w, s) = \frac{w}{w+s}$  bzw.  $p_2(w, s) = \frac{50-w}{100-w-s}$ .

Die Gesamtwahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, ist also

$$p(w, s) = \frac{1}{2} \cdot (p_1(w, s) + p_2(w, s))$$

Gesucht sind  $w$  und  $s$ , sodass  $p(w, s)$  maximal wird. Für  $w = s$  gilt  $p(w, s) = \frac{1}{2}$ . später werden wir sehen, dass dies nicht der gesuchte Maximalwert ist. Sei nun vorerst  $w \neq s$ . Da nicht in beiden Urnen mehr schwarze als weiße Kugeln sein können, wird ohne Einschränkung angenommen, dass in Urne 1 mehr weiße als schwarze Urnen sind, also dass  $s < w$  gilt. Einfache algebraische Umformungen zeigen dann:

Für  $0 < s < w \leq 50$  gilt

$$p_1(w - 1, s - 1) > p_1(w, s) \text{ und } p_2(w - 1, s - 1) > p_2(w, s).$$

Somit kann das Maximum von  $p(w, s)$  nicht für  $0 < s < w \leq 50$  angenommen werden, da  $p(w - 1, s - 1) > p(w, s)$ .

Das Maximum von  $p(w, s)$  wird also für  $s = 0$  (und  $w > 0$ ) angenommen. Es gilt  $p(w, s) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{50-w}{100-w}\right) = 1 - \frac{25}{100-w}$ . Dies wird für  $w = 1$  maximal, und dann ist  $p(1, 0) = \frac{74}{99}$ . Wegen  $\frac{74}{99} > \frac{1}{2}$  ist also  $\frac{74}{99}$  die größtmögliche erreichbare Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen.

Diese Wahrscheinlichkeit wird erreicht, wenn in Urne 1 eine weiße und keine schwarze Kugel (oder 49 weiße und 50 schwarze Kugeln gelegt) werden.  $\square$

**Aufgabe 24.18 – MO191246B.** In einer Dunkelkammer liegen ungeordnet 20 einzelne Handschuhe von gleicher Größe, und zwar

- 5 weiße Handschuhe für die rechte Hand
- 5 weiße Handschuhe für die linke Hand
- 5 schwarze Handschuhe für die rechte Hand
- 5 schwarze Handschuhe für die linke Hand

Zwei Handschuhe gelten genau dann als ein passendes Paar, wenn sie gleiche Farbe haben und der eine von ihnen für die rechte Hand, der andere für die linke Hand ist. Unter einem Zug sei die Entnahme eines einzelnen Handschuhs verstanden, ohne dass dabei eine Auswahl nach Farbe und Form möglich ist. Ein Spiel von  $n$  Zügen bestehe darin, dass man nacheinander  $n$  Züge ausführt, die dabei entnommenen Handschuhe sammelt und erst nach diesen  $n$  Zügen feststellt, ob sich unter den  $n$  entnommenen Handschuhen (mindestens) ein passendes Paar befindet. Genau dann, wenn dies zutrifft, gelte das Spiel als erfolgreich.

- a) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl  $n$  mit der Eigenschaft, dass ein Spiel von  $n$  Zügen mit Sicherheit erfolgreich ist!
- b) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl  $k$  mit der Eigenschaft, dass ein Spiel von  $k$  Zügen mit größerer Wahrscheinlichkeit als 0,99 erfolgreich ist!

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe a):* Gemäß Angabe haben wir hier vier Gruppen von je 5 Handschuhen zu folgenden Typen

- WL (= weiß und für linke Hand)
- WR (= weiß und für rechte Hand)
- SL (= schwarz und für linke Hand)
- SR (= schwarz und für rechte Hand)

Bei einer Ziehung von  $k$  Handschuhen, d.h., nach  $k$  "Zügen", kommt es genau dann zu einem Erfolg, wenn zwei Handschuhe der Typen WL und WR oder zwei Handschuhe der Typen SL und SR darunter sind. Diese Paarungen müssen aber spätestens nach 11 (= 5 + 5 + 1) Zügen auf jeden Fall auftreten.

*Lösungshinweise zur Teilaufgabe b):* Wir betrachten die Wahrscheinlichkeit eines Misserfolgs nach  $k$  Zügen, wobei hier das kleinste  $k$  zu berechnen ist, für welches diese kleiner als 0.01. Wir gehen daher im Folgenden davon aus  $k > 5$  sein wird, was dann auch durch die Rechnung nachträglich bestätigt wird.

Damit dann ein Misserfolg nach  $k \in \{6,7,8,9,10\}$  Zügen eintritt, dürfen für gezogene Handschuhe natürlich nur einer der 4 Typenkombinationen WL-SL, WL-SR, WR-SL, WR-SR auftreten. Die Wahrscheinlichkeit  $P_k$  für einen Misserfolg nach  $k$  Zügen beträgt daher

$$P_k = 4 \cdot \prod_{j=1}^k \frac{11-j}{22-1}$$

und speziell für  $k = 6$  und  $k = 7$  erhalten wir so die Werte  $P_6 \approx 0.02167$  bzw.  $P_7 \approx 0.00619$ . Die Antwort auf die Frage ist somit  $k = 7$ .  $\square$

**Aufgabe 24.19 – MO610935.** Das Fußball-Pokalspiel geht nach 120 spannenden Minuten ins Elfmeterschießen. Dabei bestimmt jede der beiden Mannschaften zunächst 5 Schützen, die abwechselnd versuchen, vom Elfmeterpunkt ein Tor zu erzielen: erst der erste Schütze der ersten Mannschaft, dann der erste Schütze der zweiten Mannschaft, dann der zweite Schütze der ersten Mannschaft usw. Hat danach eine Mannschaft mehr Tore erzielt, hat diese gewonnen. Wenn bereits vorher der Vorsprung einer Mannschaft nicht mehr aufholbar ist, wird das Elfmeterschießen sofort vorzeitig beendet.

Lionels Mannschaft ist der große Favorit – wir nehmen an, dass jeder ihrer Schützen mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{2}{3}$  ein Tor erzielt, während jeder der Schützen der anderen Mannschaft nur mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{3}$  trifft. Lionels Mannschaft schießt zuerst, und Lionel ist als fünfter Schütze seiner Mannschaft aufgestellt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Lionel zum Schuss kommt, dabei trifft und das entscheidende Tor zum Sieg schießt (womit das Elfmeterschießen direkt nach seinem Treffer beendet ist)?

*Lösungshinweise:* Wir nehmen an, dass das Spiel torlos ins Elfmeterschießen ging. Damit Lionel den Siegtreffer schießen kann, muss seine Mannschaft zuvor genau einmal mehr getroffen haben als der Gegner.

Direkt vor seinem Schuss stand es aus Sicht seiner Mannschaft also  $(k+1) : k$  mit einem  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Da das Spiel beim Stand von  $(k+1) : k$  nach 8 Schüssen noch nicht entschieden ist, ist keine Verteilung der Treffer auf die 8 Schüsse denkbar, bei der die Partie schon vorher entschieden gewesen wäre. Daher können die Treffer jeweils beliebig auf die 4 Elfmeterschüsse der beiden Mannschaften verteilt sein. Für die Auswahl der  $k+1$  Torschützen aus Lionels Mannschaft gibt es  $\binom{4}{k+1}$  Möglichkeiten, wobei  $\binom{4}{0} = 1$ ,  $\binom{4}{1} = 4$ ,  $\binom{4}{2} = 6$ ,  $\binom{4}{3} = 4$ ,  $\binom{4}{4} = 1$  gilt. Jeder dieser  $k+1$  Spieler trifft mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{2}{3}$ , die anderen  $3-k$  Spieler schießen mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{3}$  daneben. Für die Auswahl der  $k$  Torschützen aus der gegnerischen Mannschaft gibt es  $\binom{4}{k}$  Möglichkeiten. Jeder dieser  $k$  Spieler trifft mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{3}$ , jeder der anderen  $4-k$  Spieler schießt mit

Wahrscheinlichkeit  $\frac{2}{3}$  daneben. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Torstands  $(k + 1) : k$  beträgt also

$$\binom{4}{k+1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3-k} \cdot \binom{4}{k} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4-k} = \binom{4}{k+1} \cdot \binom{4}{k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

Addition über alle  $k = 0, 1, 2, 3$  liefert

$$(4 \cdot 1 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 1 \cdot 4) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 56 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

Da überdies auch Lionel treffen muss und dies mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{2}{3}$  geschieht, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit für Lionels Siegtreffer gleich

$$6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{56 \cdot 2^6}{3^9} = \frac{3584}{19683}$$

*Lösungsvariante:* Für die folgenden Überlegungen nehmen wir zunächst an, dass das Elfmeterschießen nicht vorzeitig abgebrochen wird. Es werden also in jedem Fall 10 Elfmeter geschossen, wonach die Mannschaft mit den meisten Toren gewinnt. Wir sagen, ein Elfmeter geht positiv für Lionels Mannschaft aus, wenn entweder sein Team den Elfmeter schießt und trifft oder das gegnerische Team schießt und nicht trifft. Ansonsten nennen wir den Ausgang negativ.

Lionels Mannschaft hat genau dann gewonnen, wenn mehr als die Hälfte der 10 Elfmeter für sie positiv ausgegangen ist. Die gegnerische Mannschaft gewinnt dagegen, wenn mehr als die Hälfte der 10 Elfmeter negativ ausgeht. Zum sofortigen Abbruch des Elfmeterschießens kommt es jeweils direkt nach dem sechsten positiven bzw. dem sechsten negativen Elfmeter.

Lionels Elfmeter muss also genau der sechste positive Elfmeter sein. Die Wahrscheinlichkeit für einen positiven Ausgang ist bei jedem Schuss  $\frac{2}{3}$ . Von den 8 Elfmeter vor Lionel müssen also genau 5 positiv ausgehen, und Lionel muss selbst treffen. Da die Ereignisse unabhängig voneinander sind, müssen die Wahrscheinlichkeiten multipliziert werden; die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also genau

$$\binom{8}{5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{56 \cdot 2^6}{3^9} = \frac{3584}{19683}$$

**Aufgabe 24.20 – MO531041.** Doppelkopf ist ein Spiel für vier Spieler. Zwei Varianten dieses Spiels sind im Gebrauch. In jeder der beiden Varianten werden Spielkarten verwendet, die sich durch ihre Farbe (etwa Eichel) und ihre Höhe (etwa König) unterscheiden. Es sind die Farben Eichel, Grün, Rot und Schellen sowie die Höhen As, Zehn, König, Ober, Unter und Neun in Gebrauch, wobei jede Spielkarte (also etwa „Rot Ober“) doppelt vorhanden ist (daher auch der Name Doppelkopf). Alle Unter,

Ober sowie die beiden Karten „Rot Zehn“ werden als Trumpfkarten bezeichnet, da ihnen im Spiel eine besondere Rolle zukommt. Alle anderen Karten werden als Farbkarten bezeichnet, wobei meistens die Farbkarten der Farbe Schellen auch Trumpf sind. Die Karten werden anfangs vollständig und zu gleicher Anzahl unter den Spielern verteilt, dann kann das Spiel beginnen.

In der ersten Variante wird ohne Neunen, also mit 40 Karten gespielt. Jeder Spieler erhält in dieser Variante folglich 10 Karten und es gibt genau vier Farbkarten Rot (zwei Asse und zwei Könige). In der zweiten Variante wird mit Neunen, also mit 48 Karten gespielt. Jeder Spieler erhält in dieser Variante folglich 12 Karten und es gibt genau acht Farbkarten Grün (zwei Asse, zwei Zehnen, zwei Könige und zwei Neunen).

Man vergleiche die Wahrscheinlichkeit, dass beim Spiel mit Neunen die acht grünen Farbkarten unter den Spielern gleich verteilt sind (jeder Spieler hat zwei grüne Farbkarten), mit der Wahrscheinlichkeit, dass beim Spiel ohne Neunen die vier roten Farbkarten gleich verteilt sind (jeder Spieler hat eine rote Farbkarte).

*Lösungshinweise:* Die zu vergleichenden Wahrscheinlichkeiten bestimmen sich jeweils als Quotient  $p_1 = \frac{G_1}{A_1}$  bzw.  $p_2 = \frac{G_2}{A_2}$  aus der Anzahl der für den betrachteten Fall günstigen ( $G_1, G_2$ ) zur Anzahl der möglichen ( $A_1, A_2$ ) Kartenverteilungen unter den vier Spielern, die wir mit Anton, Bernd, Claus und Detlef bezeichnen wollen. Wir denken uns die Karten auf der Rückseite mit den Zahlen 1 bis 40 bzw. 1 bis 48 durchnummeriert, so dass diese wohlunterscheidbar sind und wir sagen können, welche Kartennummern jeweils Anton, Bernd, Claus und Detlef zugeteilt wurden.

Bei jeder einzelnen Anzahlbestimmung ist aus einer Gesamtheit der Kardinalität  $N$  eine Teilmenge der Kardinalität  $M \leq N$  auszuwählen. Dies ist bekanntlich auf genau

$$\binom{N}{M} = \frac{N!}{M! \cdot (N - M)!}$$

Arten möglich.

*Variante ohne Neunen:*  $A_1$  kann wie folgt berechnet werden: Für Anton werden 10 der 40 Karten ausgewählt, für Bernd weitere 10 der restlichen 30, für Claus weitere 10 der restlichen 20 und Detlef bekommt die verbleibenden 10 Karten. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} A_1 &= \binom{40}{10} \cdot \binom{30}{10} \cdot \binom{20}{10} = \frac{40! \cdot 30! \cdot 20!}{10! \cdot (40 - 10)! \cdot 10! \cdot (30 - 10)! \cdot 10! \cdot (20 - 10)!} \\ &= \frac{40!}{10!^4} \end{aligned}$$

$G_1$  kann wie folgt berechnet werden: Wir bilden zwei Stapel, einen mit den vier roten Farbkarten und einen zweiten mit den restlichen 36 Karten. Dann wählen wir nacheinander für Anton eine der vier roten Farbkarten und 9 der 36 Restkarten, für

Bernd eine der verbliebenen drei roten Farbkarten und 9 der 27 verbliebenen Restkarten, für Claus eine der verbliebenen zwei roten Farbkarten und 9 der 18 verbliebenen Restkarten. Die restlichen 10 Karten bekommt Detlef. Damit ergibt sich

$$G_1 = \binom{36}{9} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{18}{9} \cdot \binom{2}{1} = \frac{36!}{9!^4} \cdot 4!$$

*Variante mit Neunen:* Ähnlich ergibt sich

$$A_2 = \binom{48}{12} \cdot \binom{36}{12} \cdot \binom{24}{12} = \frac{48!}{12!^4}$$

$$G_1 = \binom{40}{10} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{30}{10} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{20}{10} \cdot \binom{4}{2} = \frac{40!}{10!^4} \cdot \frac{8!}{2!^4}$$

Damit gilt

$$p_1 = \frac{G_1}{A_1} = \frac{36! \cdot 4!}{9!^4} : \frac{40!}{10!^4} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 10^4}{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37} = \frac{1000}{9132} > \frac{1}{10}$$

und

$$p_2 = \frac{G_2}{A_2} = \frac{40! \cdot 8!}{10!^4 \cdot 2!^4} : \frac{48!}{12!^4} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11^4 \cdot 12^4}{2^4 \cdot 41 \cdot 42 \cdot \dots \cdot 48} =$$

$$= \frac{11^3 \cdot 2 \cdot 6^2}{41 \cdot 43 \cdot 23 \cdot 47} = \frac{95832}{1905803} < \frac{1}{10}$$

also  $p_1 > p_2$ . □

*Anmerkung:* Es gilt  $p_1 \approx 0.109$  und  $p_2 \approx 0.0503$ .

**Aufgabe 24.21 – MO361041.** In einem „ $4 \times n$  Kartenspiel“ gebe es 4 „Farben“ und von jeder Farbe  $n$  „Bilder“; dabei sei  $n$  eine natürliche Zahl mit  $n \geq 5$ . Gefragt wird nun, wie groß die Chance ist, bei zufälligem Ziehen von fünf Karten des Spiels solche Karten zu ziehen, die alle fünf einander gleiche Farbe haben. Jemand bemerkt, dass diese Chance umso größer ist, je größer  $n$  ist. Bei einem Skatspiel ( $n = 8$ ) beispielsweise haben etwa 0.1112 % aller Möglichkeiten, fünf Karten zu ziehen, die Eigenschaft, dass es fünf Karten einander gleicher Farbe sind, bei einem Romméspiel ( $n = 13$ ) sind es bereits etwa 0.1981 % aller Möglichkeiten.

Kann  $n$  so groß gewählt werden, dass der Anteil der Möglichkeiten, fünf Karten gleicher Farbe zu ziehen, 0.5 % aller Möglichkeiten erreicht oder übersteigt?

*Lösungshinweise:* Wir wenden die Formeln zur Anzahl der Möglichkeiten, 5 gleichfarbige Karten auszuwählen, sowohl für die günstigen als auch für die möglichen Fälle an und bilden zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeit deren Quotient

$$w_n = \frac{4 \cdot \binom{n}{5}}{\binom{4 \cdot n}{5}} = \frac{\frac{4 \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}}{\frac{4 \cdot n \cdot (4 \cdot n - 1) \cdot (4 \cdot n - 2) \cdot (4 \cdot n - 3) \cdot (4 \cdot n - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}}$$

$$= \frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{(4 \cdot n - 1) \cdot (4 \cdot n - 2) \cdot (4 \cdot n - 3) \cdot (4 \cdot n - 4)}$$

Wir überprüfen die angegebenen Beispiele für  $n = 8$  und  $n = 13$ :

$$w_8 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28} = \frac{1}{31 \cdot 29} \approx 0.1112\%$$

$$w_{13} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = \frac{11 \cdot 9}{51 \cdot 5 \cdot 49 \cdot 4} \approx 0.1981\%$$

Wir schätzen den Bruch ab, indem wir im Zähler den kleinsten Faktor und im Nenner den größten Faktor wählen:

$$\frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{(4 \cdot n - 1) \cdot (4 \cdot n - 2) \cdot (4 \cdot n - 3) \cdot (4 \cdot n - 4)} < \frac{(n-1)^4}{(4 \cdot n - 4)^4} = \left(\frac{1}{4}\right)^4 < 0.391.$$

Somit muss die Frage verneint werden: Es ist nicht möglich,  $n$  so groß zu wählen, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit 0.5 übersteigt.  $\square$

## Bekannte Sätze der Mathematik<sup>5</sup>

EUGÈNE CHARLES CATALIN<sup>6</sup> stellte 1844 die nach ihm benannte **Catalanische Vermutung** auf: Die einzige ganzzahlige Lösung der Gleichung  $x^p - y^q = 1$  mit  $x, y, p, q > 1$  lautet  $x = 3, p = 2, y = 2$  und  $q = 3$ .

Erst nach über 150 Jahren wurde diese Vermutung 2002 von PREDĂ MIHĂILESCU<sup>7</sup> bewiesen. In der Bundesrunde der 63. Mathematik-Olympiade gab es passend zu dieser Vermutung die

**Aufgabe – MO630943/MO631042.** Bestimmen Sie alle Lösungspaare  $(m, n)$  ganzer Zahlen  $m$  und  $n$ , für die  $2^m = 255^n + 1$  gilt.

*Vorbemerkung:* Wir können negative Zahlen  $m$  und  $n$  leicht ausschließen, denn  $255^n$  ist stets positiv und so ist die linke Seite der Gleichung größer als 1. Weiter impliziert  $2^m > 1$  positives  $m \geq 1$ . Damit ist die linke Seite der Gleichung mindestens 2, woraus  $n \geq 0$  folgt. Bis auf die Sonderfälle  $m = 1, n = 1$  oder  $n = 0$  erinnert die Aufgabe also an die Catalanische Vermutung. Der folgende kurze Lösungsweg erweist sich damit als vollständig:

*Lösungshinweise:* Nach der Catalanischen Vermutung können nicht beide Exponenten  $m$  und  $n$  größer als 1 sein (weil dafür die Lösung bereits eindeutig bestimmt und abweichend von der Aufgabenstellung ist).

<sup>5</sup> Nach Fricke, Jan, Die Catalanische Vermutung in der Mathematik-Olympiade. In: Mitteilungen des Mathematik-Olympiade e.V., Heft 57, November 2024, S. 56f.

<sup>6</sup> Belgischer Mathematiker, geb. 1814, gest. 1894

<sup>7</sup> Rumänischer Mathematiker, geb. 1955

Für  $n = 0$  finden wir  $m = 1$ . Für  $n = 1$  finden wir  $m = 8$ . Weitere Lösungen als  $(1, 0)$  und  $(8, 1)$  kann es also nicht geben.  $\square$

Der Beweis von PREDĂ MIHĂILESCU ist so komplex, dass er nicht im Rahmen der MO zu erwarten ist. Es gibt einen schwächeren Satz, der auf KARL ZSIGMONDY<sup>8</sup> aus dem Jahr 1892 zurückgeht:

**Satz von ZSIGMONDY.** Seien  $a > b$  teilerfremde positive ganze Zahlen und  $n > 1$  ganzzahlig. Dann gibt es einen Primteiler  $p$  von  $a^n - b^n$ , der für kein  $k$  mit  $0 < k < n$  ein Teiler von  $a^k - b^k$  ist, ausgenommen

- $n = 2$  und  $a + b$  ist eine Zweierpotenz
- $n = 6, a = 2$  und  $b = 1$ .

*Lösungsvariante zur MO-Aufgabe, basierend auf dem Satz von Zsigmondy:* Wir wissen bereits, dass  $n$  nicht negativ ist. Für  $n = 0$  und  $n = 1$  finden wir wie oben die Lösungspaare  $(1, 0)$  und  $(8, 1)$ .

Angenommen, es gibt eine Lösung  $(m, n)$  mit  $n > 1$ . Dann ist  $m > 8$  und es gilt  $2^m - 1 = 255^n = 3^n \cdot 5^n \cdot 17^n$ . Wegen  $2^8 = 3 \cdot 5 \cdot 17$  kommt jeder Primfaktor von  $2^m - 1$  bereits in  $2^8 - 1$  vor, was dem Satz von ZSIGMONDY widerspricht – es kann also keine weiteren Lösungen geben.  $\square$

*Lösungsvariante der MO-Aufgabe (des MO-Aufgabenausschusses):* Es wird eine Fallunterscheidung bezüglich  $m$  durchgeführt.

*Fall 1:*  $m \leq 0$ . Dann ist  $2^m \leq 1$ . Da stets  $255^n + 1 > 1$  ist, gibt es in diesem Fall keine Lösung.

*Fall 2:*  $m = 1$ . Hier erhalten wir  $2^1 = 2 = 255^n + 1$ , also  $255^n = 1$  und daher  $n = 0$ . Die Probe bestätigt, dass  $(1, 0)$  tatsächlich ein Lösungspaar ist.

*Fall 3:*  $m \geq 2$ . In diesem Fall gilt  $2^m \geq 4$ , also  $255^n \geq 3$ . Somit muss  $n > 0$  gelten. Dann endet  $255^n + 1$  stets auf die Ziffer 6. Da sich die Einerziffern von  $2^m$  periodisch wiederholen  $(2, 4, 8, 6, 2, 4, \dots)$ , kommen für  $m$  nur die Vielfachen von 4 in Frage, also  $m = 4 \cdot k$  mit  $k \geq 1$  und ganzzahlig. Wir erhalten  $2^m = 2^{4 \cdot k} = 16^k$ . Die zu lösende Gleichung lautet dann  $(4^k)^2 = 255^n + 1$ . Umformen und Faktorisieren unter Verwendung der Primfaktorzerlegung  $255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$  ergeben

$$(4^k - 1) \cdot (4^k + 1) = 255^n = 3^n \cdot 5^n \cdot 17^n$$

bzw.

$$(2^k - 1) \cdot (2^k + 1) \cdot (4^k + 1) = 255^n = 3^n \cdot 5^n \cdot 17^n$$

<sup>8</sup> Österreichischer Mathematiker, geb. 1867, gest. 1925

Die Faktoren 3, 5 und 17 sind Primzahlen, und  $4^k - 1$  und  $4^k + 1$  sind teilerfremd wegen  $ggT(4^k - 1, 4^k + 1) = ggT(2, 4^k + 1) = 1$ .<sup>9</sup> Damit gilt erst recht  $ggT(4^k + 1, 2^k - 1) = 1$  und  $ggT(4^k + 1, 2^k + 1) = 1$ .  $2^k - 1$  und  $2^k + 1$  sind wegen  $ggT(2^k - 1, 2^k + 1) = ggT(2, 2^k + 1) = 1$  ebenfalls teilerfremd. Wegen  $2^k - 1 < 2^k + 1 < 4^k + 1$  ergeben sich für nun die folgenden Möglichkeiten.

*Fall 3.1:*  $2^k - 1 = 1$  und  $(2^k + 1) \cdot (4^k + 1) = 255^n$ , was keine Lösung liefert.

*Fall 3.2:*  $2^k - 1 > 1$  bzw.  $k > 1$ . Da die Zahl  $255^n$  nur drei verschiedene Primfaktoren besitzt, lässt sie sich eindeutig als Produkt von drei der Größe nach geordneten paarweise teilerfremden Faktoren größer als 1 schreiben und es muss  $2^k - 1 = 3^n$ ,  $2^k + 1 = 5^n$  und  $4^k + 1 = 17^n$  gelten, also insbesondere auch  $3^n + 2 = 5^n$  oder äquivalent  $\left(\frac{3}{5}\right)^n + \frac{2}{5^n} = 1$ . Für  $n = 1$  ist dies richtig, und eine Probe bestätigt, dass mit  $k = 2$  und  $m = 8$  alle Gleichungen erfüllt sind. Für  $n > 1$  ist die linke Seite aber kleiner als  $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$  und es gibt keine weitere Lösung.  $\square$

Die Jury der Bundesrunde musste entscheiden, ob die Kurzfassungen auf der Basis der Catalanischen Vermutung oder des Satzes von ZSIGMONDY als vollständige Lösung anzuerkennen sind. Aufgrund des Hinweises auf dem Aufgabenblatt

*„... Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.“*

wurde zugunsten der Teilnehmer ein solcher Lösungsweg akzeptiert. Will man so eine Vereinfachung vermeiden, ist die Aufgabenstellung etwa wie folgt zu ergänzen: *Für die Lösungsdarstellung genügt es nicht, einen geeigneten Satz zu zitieren und anzuwenden.*

## Monatsaufgabe 02/2025<sup>10</sup>

Es sitzen 2024 Mathematikerinnen<sup>11</sup> in einer Reihe am Ufer des Flusses Tisza. Jede von ihnen arbeitet an genau einem Forschungsthema. Falls zwei Mathematikerinnen am selben Thema arbeiten, arbeiten auch alle Mathematikerinnen, die zwischen ihnen sitzen, an diesem Thema.

<sup>9</sup> Dabei wurde von der Beziehung  $ggT(A, B) = ggT(B - A, B)$  Gebrauch gemacht.

<sup>10</sup> Lösungseinsendungen an [bin0@hrz.tu-chemnitz.de](mailto:bin0@hrz.tu-chemnitz.de) sind bis 31.03.2025 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

<sup>11</sup> Die Mathematikerin (anstelle des Genders für „Mathematiker“) ([https://www.mathe-wettbewerbe.de/fileadmin/Mathe-Wettbewerbe/Mathematik-Olympiade/Fotos/Mathematik-Olympiade\\_2023/Originaltiger.JPG](https://www.mathe-wettbewerbe.de/fileadmin/Mathe-Wettbewerbe/Mathematik-Olympiade/Fotos/Mathematik-Olympiade_2023/Originaltiger.JPG)) ist seit 2007 das Maskottchen der Wettbewerbsteilnehmerinnen und -teilnehmer bei jeder IMO, EGMO, Mathematik-Olympiaden Bundesrunde und vielen weiteren mathematischen Events.

Marvin versucht, für jedes Paar von Mathematikerinnen herauszufinden, ob sie am selben Forschungsthema arbeiten. Er darf dafür jeder Mathematikerin die folgende Frage stellen: „Wie viele von diesen 2024 Mathematikerinnen arbeiten an deinem Forschungsthema?“ Er stellt diese Fragen nacheinander. Er kennt also alle bisherigen Antworten, bevor er die nächste Frage stellt.

Bestimme die kleinste positive ganze Zahl  $k$ , sodass Marvin sein Ziel stets mit höchstens  $k$  Fragen erreichen kann.

## Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 12/2024

**Aufgabe I-4** (Individualwettbewerb der 18. MeMO, 2024, Szeged/Ungarn). Für eine positive ganze Zahl  $n$  bezeichne  $\sigma(n)$  die Summe der positiven Teiler von  $n$ .

Bestimme alle Polynome  $P$  mit ganzzahligen Koeffizienten, sodass für alle positiven ganzen Zahlen  $k$  der Wert  $P(k)$  durch  $\sigma(k)$  teilbar ist.

*Lösungshinweise:* Wir verwenden mehrfach die bekannte Aussage für Polynome  $P$  mit ganzzahligen Koeffizienten und ganzen Zahlen  $a$  und  $b$ , nach der die Differenz  $a - b$  ein Teiler von  $P(a) - P(b)$  ist.

Wir betrachten zwei Primzahlen  $p$  und  $q$  mit  $p \neq q$ . Zudem sei  $P$  ein Polynom mit der geforderten Eigenschaft. Weil das Produkt  $p \cdot q$  die Teiler  $1, p, q$  und  $p \cdot q$  besitzt, gilt  $\sigma(p \cdot q) = 1 + p + q + p \cdot q = (1 + p) \cdot (1 + q)$ . Weil  $\sigma(p \cdot q)$  ein Teiler von  $P(p \cdot q)$  sein soll, gilt auch  $(p + 1)(q + 1) \mid P(p \cdot q)$ . Dies ist äquivalent zu  $p \cdot q - (-p - q - 1) \mid P(p \cdot q)$ .

Setzen wir  $a = p \cdot q$  und  $b = -p - q - 1$ , so folgt aus  $a - b \mid P(a) - P(b)$  auch  $(p + 1) \cdot (q + 1) \mid P(p \cdot q)$  und wir erhalten  $(p + 1) \cdot (q + 1) \mid P(-p - q - 1)$ . Dann ist aber auch jeder der beiden Faktoren ein Teiler von  $P(-p - q - 1)$  und folglich gilt auch  $-p - 1 \mid P(-p - q - 1)$ .

Setzen wir nun  $a = -p - q - 1$  und  $b = -q$ , so erhalten wir die Aussage  $-p - 1 \mid P(-p - q - 1) - P(-q)$ . Weil bereits  $-p - 1 \mid P(-p - q - 1)$  gilt, folgt auch  $p + 1 \mid P(-q)$  für alle Primzahlen  $p$  und  $q$ . Dies ist jedoch nur für  $P(-q) = 0$  erfüllbar. Da es unendlich viele Primzahlen  $q$  gibt, besitzt das Polynom unendlich viele Nullstellen. Daraus folgt unmittelbar  $P = 0$ , also das Nullpolynom, als einzige Möglichkeit, die geforderte Eigenschaft zu erfüllen.  $\square$

## In alten Mathe-Büchern geblättert

Journal  
für die  
reine und angewandte Mathematik.  
In zwanglosen Heften

herausgegeben von  
A.L. Crelle  
Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden  
Sieben und zwanzigster Band  
Berlin, 1844

S. 192

### 13. Note

extraite d'une lettre adressée à l'éditeur par Mr. *E. Catalan*, Répétiteur à l'école polytechnique de Paris.

„**J**e vous prie, Monsieur, de vouloir bien énoncer, dans votre recueil, le  
„théorème suivant, que je crois vrai, bien que je n'aie pas encore réussi à  
„le démontrer complètement: d'autres seront peut-être plus heureux:  
„Deux nombres entiers consécutifs, autres que 8 et 9, ne peuvent être  
„des puissances exactes; autrement dit: l'équation  $x^m - y^n = 1$ , dans  
„laquelle les inconnues sont entières et positives, n'admèt qu'une seule  
„solution.”

*Ich bitte Sie, Herr, in Ihrer Sammlung zu erwähnen. Ich glaube, dass das folgende Theorem wahr ist, obwohl es mir noch nicht gelungen ist, es vollständig zu beweisen: Andere werden vielleicht glücklicher sein: „Zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen außer 8 und 9 können keine exakten Potenzen sein; mit anderen Worten: Die Gleichung, in der die Unbekannten ganzzahlig und positiv sind, hat nur eine einzige Lösung.“*

#### Termine

**Wettbewerb „Jugend forscht“, Regionalwettbewerb Nordwestsachsen, 13.02.2025**  
in Leipzig, 14.00 – 18.30 Uhr, Universität Leipzig

**64. Mathematik-Olympiade, Landesausscheid Sachsen, 01./02.03.2025**

**Wettbewerb „Jugend forscht“, Regionalwettbewerb Südwestsachsen, 07.03.2025** in  
Chemnitz, 13.00 – 17.00 Uhr, IHK Chemnitz

**Wettbewerb „Jugend forscht“, Regionalwettbewerb Ostsachsen, 08.03.2025** in  
Dresden 14.00 – 18.30 Uhr, Sachsen Energie Dresden

## Inhaltsverzeichnis

Vorwort.....	2
Thema 29.2 – Schubfachprinzip .....	3
Thema 24.3 – Kombinatorik: klassische Wahrscheinlichkeit.....	7
Bekannte Sätze der Mathematik .....	16
Monatsaufgabe 02/2025.....	18
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 12/2024 .....	19
In alten Mathe-Büchern geblättert .....	19
Termine.....	20

## Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2024/25)

Ausgabe <sup>12</sup>	Nr.	Thema	Aufgabe
02/2025 (Feb.)	Thema 29.2	Schubfachprinzip	MO640924
02/2025 (Feb.)	Thema 24.3	Kombinatorik	MO610935
01/2025 (Jan.)	Thema 24.2	Kombinatorik	MO641023 MO640923
12/2024 (Dez.)	Thema 30	Diophantische Gleichungen	MO641011
11/2024 (Nov.)	Thema 19.2	Maximale Eigenschaften ebener Figuren	MO641012
11/2024 (Nov.)	Thema 03	Gleichungssysteme	MO641015
11/2024 (Nov.)	Thema 22	Zahlenverteilungen auf Figuren	MO641016
10/2024 (Okt.)	Thema 04.3	Flächenberechnung	
09/2024 (Sept.)		Binomialkoeffizienten	MO631045
	Thema 04.2	Flächenberechnung	MO630946
08/2024 (Aug.)	Thema 29.1	Schubfachprinzip	MO631041
			MO630941
			MO630934

### Impressum

Redaktion: Dr. Norman Bitterlich  
 Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz  
 E-Mail: [bin0@hrz.tu-chemnitz.de](mailto:bin0@hrz.tu-chemnitz.de)  
[www.kzm-sachsen.de](http://www.kzm-sachsen.de)  
 Auflage: digital, auf Anfrage auch Papiaerausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

<sup>12</sup> Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage ([bin0@hrz.tu-chemnitz.de](mailto:bin0@hrz.tu-chemnitz.de)) oder unter <https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben> erhältlich.