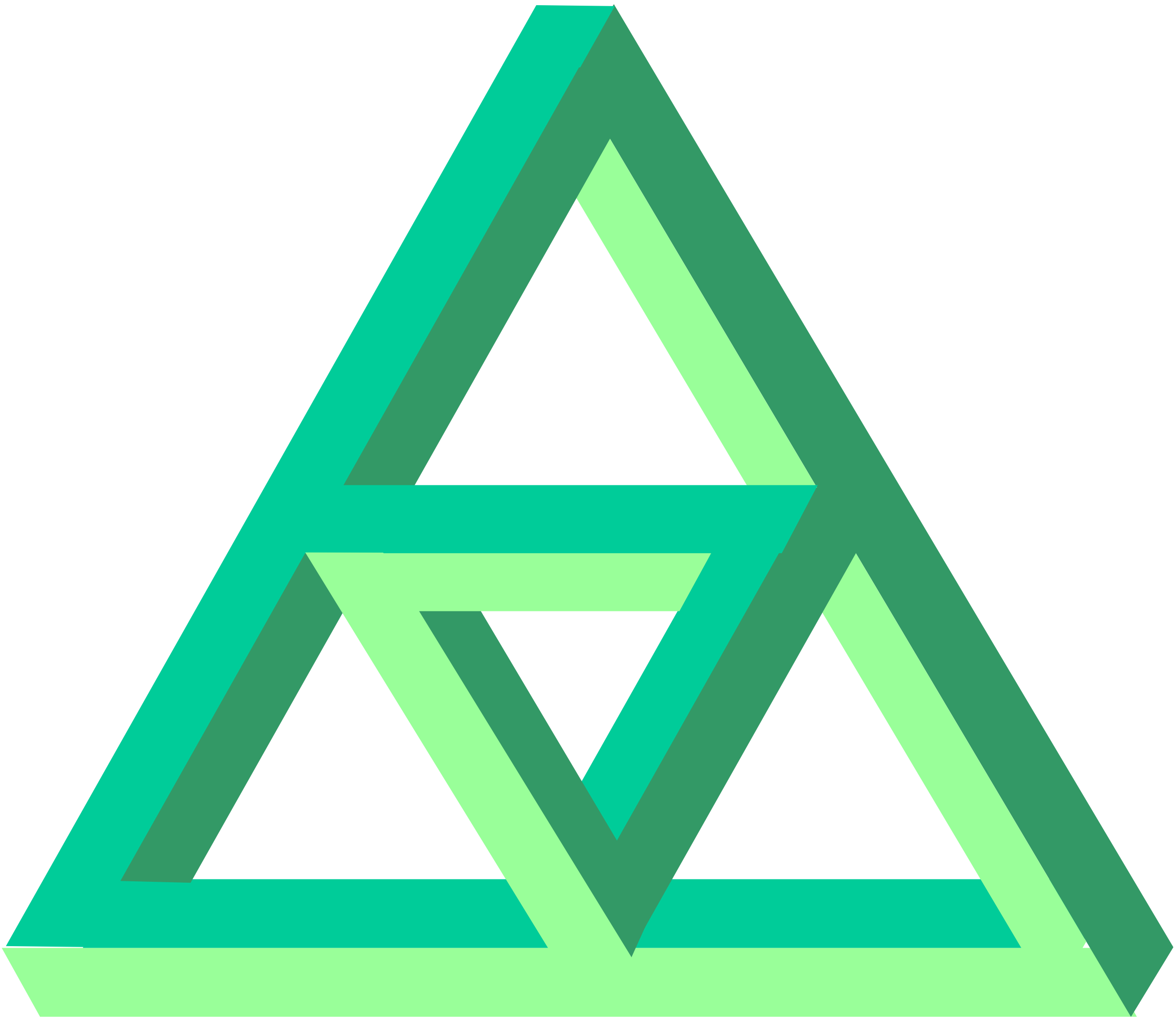
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 10/2024 (Oktober 2024) 23. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir schließen die Diskussion zum Thema Flächenberechnung ab. Dabei betrachten wir Aufgaben mit ähnlichen Fragestellungen, entweder durch Differenzierung der Schwierigkeiten zwischen den Olympiadeklassen 9 und 10 oder durch aufsteigende Schwierigkeiten in den MO-Runden und Jahrgängen. In beiden Fällen zeigt sich, wie eine intensive Nachbereitung von Aufgaben erfolgreich geführt werden kann.

Passend zum Thema blicken wir im historischen Teil in die antike Mathematik zurück und zeigen Beispiele zur Quadratur von (geometrischen) Möndchen. Neben dem interessanten Einblick in die Leistungen der Mathematiker vor über 2000 Jahren finden wir hier Übungsaufgaben für Flächenberechnungen.

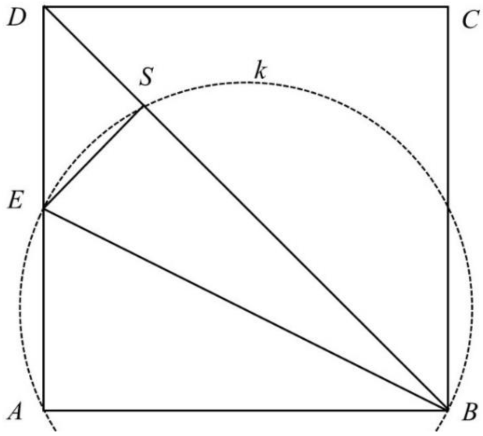
Wir informieren über die 18. Mitteleuropäische Mathematikolympiade (MeMO), bei der das deutsche Team im Mannschaftswettbewerb einen hervorragenden 2. Platz erreichte! Wir verbinden damit die Vorfreude auf die nächste MeMO[3], die vom 25. bis 31. August 2025 in der Kulturhauptstadt Europas Chemnitz stattfinden wird.

Wir vertiefen die Lösungsdiskussion der aktuellen **Aufgabe 1-5A** des diesjährigen sächsischen Korrespondenzzirkels Mathematik und beschäftigen uns mit dem Verhältnis von arithmetischen und geometrischen Mittelwerten.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1
[3] https://www.memo2025.de/

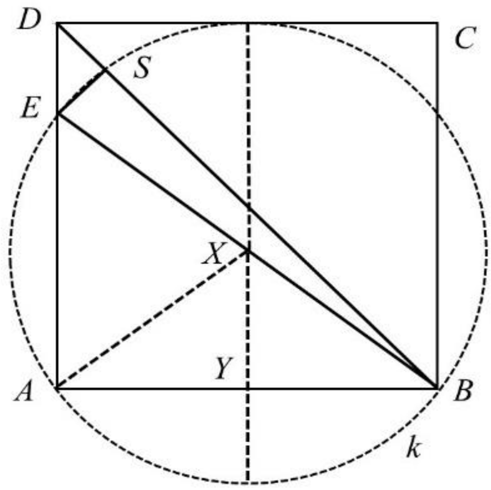
Thema 04.3 – Flächenberechnung

Vorbemerkungen: Ein wesentliches Motiv für eine intensive Nachbereitung aktueller MO-Aufgaben sollte darin bestehen, Lösungsstrategien für Aufgaben zu verstehen und anwenden zu können. Wir können nicht vorhersagen, ob und wann eine Aufgabenidee (in abgewandelter Form) erneut erscheint. Aber weil wir diesen Effekt beobachten können, lohnt es sich stets. Zur Landesrunde der 60. MO fanden wir wieder „verwandte" Aufgabenstellungen:



Aufgabe 4.12 – MO601023. Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 1. Es sei E der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AD}$. Die Strecke $\overline{BE}$ ist der Durchmesser eines Kreises k. Der Kreis k schneidet die Diagonale $\overline{BD}$ in S.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ΔEBS.



Aufgabe 4.13 – MO600932. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 1. Ferner sei E ein Punkt auf der Strecke $\overline{AD}$. Die Strecke $\overline{BE}$ sei ein Durchmesser eines Kreises k. Der Kreis k schneide die Diagonale $\overline{BD}$ in einem von B verschiedenen Punkt S und berühre die Quadratseite $\overline{CD}$.

Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AE}$ und den Flächeninhalt des Dreiecks ΔEBS.

Lösungshinweise: Die Ähnlichkeit des Aufgabentextes und die der zugehörigen Skizzen lässt vermuten, dass auch der Lösungsansatz ähnlich sein wird. Tatsächlich werden wir die neue Aufgabe leicht lösen können, wenn wir die Länge der Strecke $\overline{ED}$ ermitteln (was durch die Aufgabenstellung explizit gefordert wird). Dann können wir die Argumentation aus der Aufgabe MO601032[4] übernehmen: Das Dreieck ΔDES ist rechtwinklig-gleichschenklig und das Dreieck ΔEBS ist wegen des THALESsatzes rechtwinklig. Somit können wie die Längen $\overline{ES}$ und $\overline{BS}$ explizit berechnen.

Verwenden wir im rechtwinkligen Dreieck ΔAYX mit der Hypotenuse $\overline{AX} = r$ und der Kathete $\overline{XY} = x$ den Satz des PYTHAGORAS, so gilt $r^2 - x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Wegen $r + x = 1$ (Länge der Quadratseite) folgt daraus unmittelbar

[4] Siehe Heft 03/2021

$$r^2 - x^2 = (r-x)\cdot(r+x) = r - x = \tfrac{1}{4}.$$

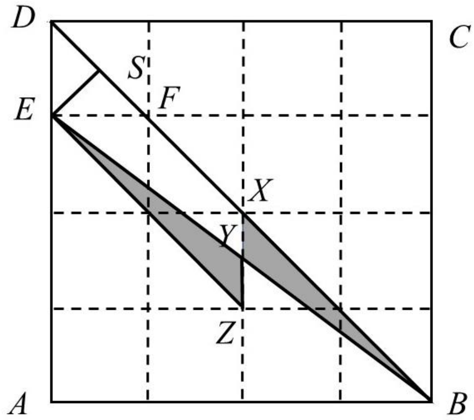
Addieren wir auf beiden Seiten der rechten Gleichung r, so finden wir (wieder unter Verwendung von $r + x = 1$) $2r = \frac{5}{4}$. Wenden wir nun den Satz des PYTHAGORAS auf das rechtwinklige Dreieck ΔABE mit der Hypotenuse $\overline{BE} = 2r$ und der Kathete $|AB| = 1$ an, so erhalten wir

$$|AE| = \sqrt{4r^2 - 1} = \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}.$$

Aus dem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck ΔDES erhalten wir $|ES| = \frac{1}{8}\sqrt{2}$ und $|BS| = |BD| - |SD| = |BD| - |ES| = \sqrt{2} - \frac{1}{8}\sqrt{2} = \frac{7}{8}\sqrt{2}$. Somit gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks ΔBSE:

$$A_{BSE} = \frac{1}{2}\cdot|BS|\cdot|ES| = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{8}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{8}\sqrt{2} = \frac{7}{64}$$ ❑

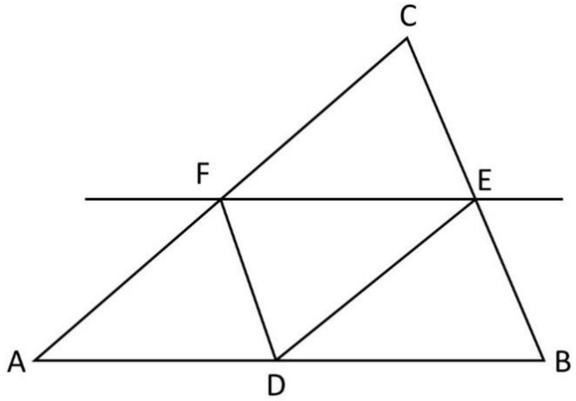
Lösungsvariante: Aber auch der Lösungsansatz über eine Flächenzerlegung gelingt, wenn das Zwischenergebnis $|ED| = \frac{1}{4}$ bekannt ist. Dafür bietet sich ein 4 x 4 – Gitter an, in dem insgesamt 64 Teilflächen der Größe des Dreiecks ΔEFS enthalten sind. Es fällt uns nun leicht, die Flächengleichheit der beiden grau hinterlegten Dreiecke ΔEZY und ΔBXY nachzuweisen. Dann überdeckt das Trapez $EZXS$ insgesamt 7 solche Teilflächen – flächengleich zum Dreieck ΔBSE. Also beträgt die gesuchte Fläche $\frac{7}{64}$. ❑



Solche Aufgaben-"Verwandschaften" finden wir in der MO-Geschichte immer wieder, manchmal auch Jahre auseinander:

Aufgabe 4.14 – MO370946: Von einer Figur (s. Skizze) sei bekannt:

- Die Gerade durch E und F ist parallel zu der Geraden durch A und B.
- Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔFEC beträgt 40 cm², die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke ΔADF und ΔDBE beträgt 150 cm².



Stellen Sie fest, ob aus diesen Angaben der Flächeninhalt des Dreiecks ΔDEF eindeutig folgt und berechnen Sie gegebenenfalls diesen Flächeninhalt.

Lösungshinweise: Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔDEF sei x, seine Höhe bezeichnen wir mit h_1. Weil die Gerade durch A und B parallel zur Geraden durch E und F ist, haben die Dreiecke ΔADF, ΔDBE und ΔDEF die gleiche Höhe, also ebenfalls h_1. Dann gilt aufgrund der Flächenformel eines Dreiecks ΔXYZ mit der Grundseite $\overline{XY}$ für die zugehörige Höhe $h_{XY} = \frac{A_{XYZ}}{2\cdot|\overline{XY}|}$. Dies wenden wir nun an:

$$h_1 = \frac{A_{DEF}}{2\cdot|\overline{EF}|} = \frac{x}{2\cdot|\overline{FE}|}\ , h_1 = \frac{A_{ADF}+A_{DBE}}{2\cdot|\overline{AB}|} = \frac{150}{2\cdot|\overline{AB}|}\,.$$

Damit finden wir

$$x : 150 = |\overline{EF}| : |\overline{AB}|\,.$$

Zudem gilt $A_{FEC} + A_{DEF} = \frac{1}{2}\cdot|\overline{EF}|\cdot\big((h-h_1)+h_1\big) = \frac{1}{2}\cdot|\overline{EF}|\cdot h$, wobei h die Höhe auf $\overline{AB}$ im Dreieck ΔABC bezeichnet. Damit gilt auch

$$(A_{FEC} + A_{DEF}) : (A_{ABC}) = |EF| : |AB| = (x+40) : (x+40+150)\,,$$

also

$$x : 150 = (x+40) : (x+190)$$

bzw.

$$x^2 + 40\cdot x - 6000 = 0\,.$$

Diese quadratische Gleichung ist gleichbedeutend zu $(x+100)\cdot(x-60) = 0$. Somit finden wir $A_{DEF} = 60$ cm² (diesen Wert erhalten wir natürlich auch aus der quadratischen Gleichung unter Benutzung der Lösungsformel). ❑

Die entsprechende Aufgabe für die Klassenstufe 10 ist eine Verallgemeinerung dieser Aufgabe, wurde aber ohne Skizze gestellt. Damit wird der Zusammenhang beider Aufgaben erst deutlich, wenn eine passende Skizze wie in MO370946 angefertigt wird.

Aufgabe 4.15 – MO371046. Axel zeichnet ein Dreieck ΔABC und eine zu AB parallele Gerade, die $\overline{AC}$ in F und $\overline{BC}$ in E schneidet, auf $\overline{AB}$ legt er einen Punkt D fest. Er beginnt, die Flächeninhalte der Dreiecke ΔADF, ΔDBE, ΔDEF und ΔFEC auszumessen. Ingrid behauptet, dass sie den Flächeninhalt des Dreiecks ΔDEF eindeutig durch Berechnung ermitteln könne, wenn ihr die Flächeninhalte der Dreiecke ΔADF, ΔDBE und ΔFEC bekannt seien. Wie könnte Ingrid vorgehen? Welche Begründung müsste sie für ihr Vorgehen angeben?

Lösungshinweise: Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔDEF sei x, seine Höhe bezeichnen wir mit h_1. Weil die Gerade durch A und B parallel zur Geraden durch E und F ist, haben die Dreiecke ΔADF, ΔDBE und ΔDEF die gleiche Höhe, also ebenfalls h_1.

Dann gilt aufgrund der Flächenformel eines Dreiecks ΔXYZ mit der Grundseite $\overline{XY}$ für die zugehörige Höhe $h_{XY} = \frac{A_{XYZ}}{2\cdot|\overline{XY}|}$. Dies wenden wir nun an:

$$h_1 = \frac{A_{DEF}}{2 \cdot |\overline{EF}|} = \frac{x}{2 \cdot |\overline{FE}|}\ , h_1 = \frac{A_{ADF} + A_{DBE}}{2 \cdot |\overline{AB}|}\ .$$

Damit finden wir $x : (A_{ADF} + A_{DBE}) = |\overline{EF}| : |\overline{AB}|$.

Zudem gilt $A_{FEC} + x = \frac{1}{2} \cdot |\overline{EF}| \cdot \big((h - h_1) + h_1\big) = \frac{1}{2} \cdot |\overline{EF}| \cdot h$, wobei h die Höhe auf $\overline{AB}$ im Dreieck ΔABC bezeichnet. Damit gilt auch

$$(A_{FEC} + x) : (A_{ABC}) = |\overline{EF}| : |\overline{AB}| = x : (A_{ADF} + A_{DBE})\ .$$

Wir stellen diese Gleichung nach x um, wobei wir $A_{ABC} = x + A_{ADF} + A_{DBE} + A_{FEC}$ verwenden:

$$(A_{ADF} + A_{DBE}) \cdot A_{FEC} + (A_{ADF} + A_{DBE}) \cdot x = x \cdot (x + A_{ADF} + A_{DBE} + A_{FEC}),$$

also

$$x^2 + A_{FEC} \cdot x - (A_{ADF} + A_{DBE}) \cdot A_{FEC} = 0\ .$$

Diese quadratische Gleichung ist lösbar, da die Diskriminante

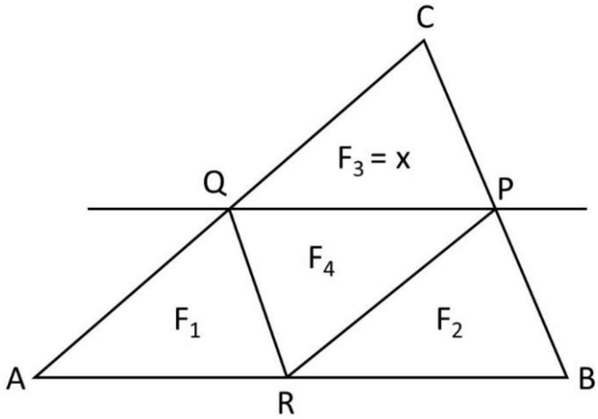
$$D = \left(\frac{A_{FEC}}{2}\right)^2 + (A_{ADF} + A_{DBE}) \cdot A_{FEC}$$

stets positiv ist. Da zudem $\sqrt{D} > \frac{A_{FEC}}{2}$ gilt, existiert nach dem Ergebnis gemäß Lösungsformel $x_{1,2} = -\frac{A_{FEC}}{2} \pm \sqrt{D}$ genau eine positive Lösung der quadratischen Gleichung, die die Aufgabenstellung beantwortet. ❑

Hinweis: Setzen wir die konkreten Werte aus Aufgabe MO370946 ein, so stimmt die quadratische Gleichung mit dem obigen Ergebnis überein.

Aufgabe 4.16 – MO530945. Im Dreieck ΔABC sind im Inneren der Seite $\overline{BC}$ ein Punkt P, im Inneren der Seite $\overline{AC}$ ein Punkt Q und im Inneren der Seite $\overline{AB}$ ein Punkt R so gegeben, dass die Gerade PQ parallel zur Geraden AB verläuft. Weiter führen wir die Bezeichnungen $F(ARQ) = F_1$, $F(BPR) = F_2$ und $F(CQP) = F_3 = x$ für die Flächeninhalte dieser bezeichneten Teildreiecke ein.

Bestimmen Sie eine Formel für $F = F(ABC)$ in Abhängigkeit von x, wenn bekannt ist, dass $F_1 + F_2 = 6 \cdot F_3$ gilt.



Lösungshinweise: Fertigen wir die zur Aufgabe passende Skizze an, erkennen wir den Zusammenhang zur vorigen Aufgabe. Natürlich lässt sich diese Aufgabe unabhängig von dem speziellen Vorgänger lösen, doch wenn wir die Gleichung

$$x : 150 = (x + 40) : (x + 190)$$

auf die nun gegebenen Größen anwenden, erhalten wir

$$F_4 : (F_1 + F_2) = (F_4 + F_3) : (F_4 + F_1 + F_2 + F_3)\,.$$

Dies Gleichung vereinfacht sich, wenn wir die Voraussetzung $F_1 + F_2 = 6 \cdot F_3$ einsetzen:

$$F_4 : (6 \cdot F_3) = (F_4 + F_3) : (F_4 + 7 \cdot F_3)\,.$$

Substituieren wir zur Vereinfachung der Schreibweise $F_4 = y$, so können wir die Gleichung zu $y^2 + x \cdot y - 6 \cdot x^2 = 0$ umformen. Entweder aus der Lösungsformel für die quadratische Gleichung für die Variable y oder aus der Zerlegung in Linearfaktoren $(y - 2 \cdot x) \cdot (y + 3 \cdot x) = 0$ finden wir $y = 2 \cdot x$. Dann gilt aber

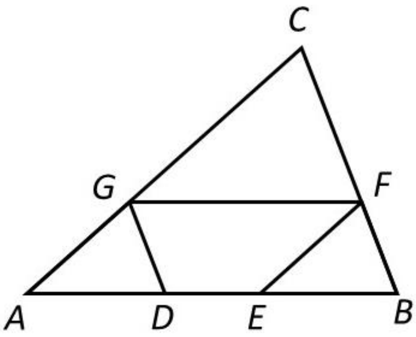
$$F(ABC) = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 6 \cdot F_3 + F_3 + 2 \cdot F_3 = 9 \cdot F_3 = 9 \cdot x \qquad \square$$

Zwischenzeitlich kehrte dieser Aufgabentyp etwas abgewandelt bereits zurück. Auch hier geht es um die Zerlegung der Dreiecksfläche in vier Teilflächen:

Aufgabe 4.17 – MO470933. Gegeben sind ein Dreieck ΔABC sowie eine Parallele g zur Seite $\overline{AB}$, welche die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ im Inneren in den Punkten G bzw. F schneidet. Weiter schneide die Parallele zu $\overline{AC}$ durch F die Seite $\overline{AB}$ in E und die Parallele zu $\overline{BC}$ durch G die Seite $\overline{AB}$ in D. Dabei möge g so gewählt sein, dass D auf der Strecke $\overline{AE}$ liegt.

a) Wie muss man g wählen, damit die Dreiecke ΔADG, ΔBFE und ΔCGF flächengleich sind?
b) Wie muss man g wählen, damit die Fläche des Vierecks $DEFG$ maximal wird?

Lösungshinweise – allgemeine Vorbemerkungen: Die Dreiecke ΔADG, ΔEBF und ΔGFC sind sämtlich ähnlich zum Dreieck ΔABC (Stufenwinkel an parallelen Geraden). Die Dreiecke ΔADG und ΔEBF sind sogar kongruent, da sie eine gemeinsame Höhe haben. Bezeichnen wir mit f den Streckfaktor $|\overline{AG}| : |\overline{AC}|$, so gilt für die Flächeninhalte



$$F(ADG) = F(EBF) = f^2 \cdot F(ABC)$$
$$F(GFC) = (1-f)^2 \cdot F(ABC)$$

Lösungshinweise zu Teil a): Die Dreiecke sind also genau für $f = \frac{1}{2}$ flächengleich. Dies ist genau dann der Fall, wenn g die Mittellinie ist. Dann ist $D = E$ der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$.

Lösungshinweise zu Teil b): Für den Flächeninhalt des Vierecks erhalten wir nach dem Subtraktionsprinzip

$$F(DEFG) = F(ABC) - F(ADG) - F(EBF) - F(GFC)$$
$$= (1 - 2f^2 - (1-f)^2) \cdot F(ABC) = (2f - 3f^2) \cdot F(ABC)\,.$$

Dieser Ausdruck wird genau dann maximal, wenn $(2f - 3f^2)$ seinen kleinsten Wert annimmt, was wegen

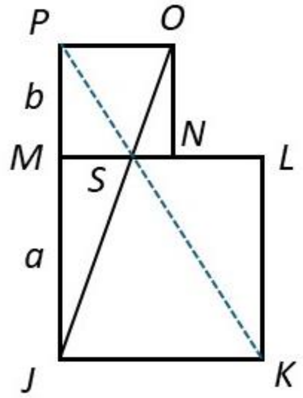
$$3f^2 - 2f = 3 \cdot \left(f - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} \geq -\frac{1}{3}$$

genau für $f = \frac{1}{3}$ der Fall ist. In diesem Fall gilt $F(DEFG) = \frac{1}{3} \cdot F(ABC)$ und g ist die Parallele durch den Schwerpunkt des Dreiecks. Hier wird die Seite $\overline{AB}$ durch D und E in drei gleichlange Strecken zerlegt. ❑

Abschließend zum Thema 4 vergleichen wir das folgende Aufgaben-Paar:

Aufgabe 4.18 – MO580923. Auf ein Quadrat $JKLM$ mit der Seitenlänge a wird ein kleineres Quadrat $MNOP$ mit der Seitenlänge b aufgesetzt, wobei N auf der Strecke $\overline{ML}$ liegt. Es gelte $|LN| = 16$ cm und $|JP| = 80$ cm. Die Strecken $\overline{JO}$ und $\overline{MN}$ schneiden sich in einem Punkt S.

a) Berechnen Sie die Seitenlängen a und b.
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ΔJSP.
c) Zeigen Sie, dass S auf der Strecke $\overline{KP}$ liegt.



Lösungshinweise Teil a): Es gilt a > b. Die Summe der Seitenlängen ist $a + b = 80$ cm, die Differenz $a - b = 16$ cm. Die Seitenlängen betragen deshalb $a = \frac{((a+b)+(a-b))}{2} = 48$ cm und $b = \frac{((a+b)-(a-b))}{2} = 32$ cm.

Lösungshinweise Teil b): Da S auf der P gegenüberliegenden Seite des Dreiecks ΔJOP liegt, zerlegt die Strecke $\overline{PS}$ dieses Dreieck in die beiden Teildreiecke ΔJSP und ΔPSO.

Die Fläche des Dreiecks ΔJSP erhalten wir daher, wenn wir vom Flächeninhalt des Dreiecks ΔJOP den Flächeninhalt des Dreiecks ΔPSO subtrahieren.

- Das Dreieck ΔJOP hat den Flächeninhalt $A_{JOP} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot (a+b) = 16 \cdot 80\ \mathrm{cm}^2 = 1280\ \mathrm{cm}^2$.
- Das Dreieck ΔSOP hat den Flächeninhalt $A_{SOP} = \frac{1}{2} \cdot b^2 = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 32\ \mathrm{cm}^2 = 512\ \mathrm{cm}^2$.
- Somit ergibt sich für den Flächeninhalt des Dreiecks ΔJSP insgesamt $A_{JSP} = 1280\ \mathrm{cm}^2 - 512\ \mathrm{cm}^2 = 768\ \mathrm{cm}^2$.

Lösungshinweise zu Teil c): Analog zu Teilaufgabe b) erhalten wir: Die Strecken $\overline{KP}$ und $\overline{ML}$ schneiden sich im Punkt T und es gilt:

$$A_{JTP} = A_{JKP} - A_{JKT} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (a+b) - \frac{1}{2} \cdot a^2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b\,,$$

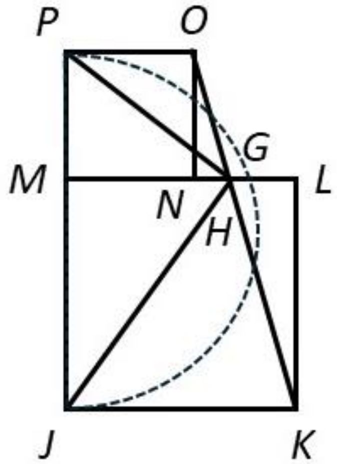
also $A_{JTP} = A_{JSP}$. Da die Dreiecke ΔJTP und ΔJSP in der Seite $\overline{JP}$ übereinstimmen und S und T auf $\overline{ML}$ liegen, muss auch für die zugehörigen Dreieckshöhen $\overline{MT} = \overline{MS}$ und damit $S = T$ gelten. ❑

Aufgabe – MO580946. Auf ein Quadrat $JKLM$ wird ein kleineres Quadrat $MNOP$ so außen aufgesetzt, dass der Punkt N im Inneren der Strecke $\overline{ML}$ liegt. Es sei H der Schnittpunkt der Geraden KO und ML. Zeigen Sie, dass der Winkel $\sphericalangle PHJ$ stumpf ist.

Lösungshinweise: Es seien $a = |\overline{LM}|, b = |\overline{NM}|$ und G der Schnittpunkt des THALESkreises über $\overline{JP}$ mit dem Strahl $\overrightarrow{ML}$. Nach dem Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck ΔJGP mit der Hypotenuse $\overline{JP}$ und zugehöriger Höhe $\overline{GM}$ ist

$$|\overline{GM}| = \sqrt{|\overline{JM}| \cdot |\overline{MP}|} = \sqrt{a \cdot b}$$

das geometrische Mittel der beiden Zahlen a und b.



Da O und K auf verschiedenen Seiten der Geraden ML liegen, befindet sich H auf der Strecke $\overline{OK}$. Da diese zwischen den Parallelen ON und KL liegt, befindet sich H auch auf der Strecke $\overline{NL}$. Insbesondere gilt $|\overline{HL}| = |\overline{LN}| - |\overline{HN}|$.

Wegen $a > b$ ist $|\overline{LN}| = a - b$, und nach dem Strahlensatz mit den Geraden OK und ML sowie dem Zentrum H gilt

$$\frac{|\overline{HN}|}{|\overline{NO}|} = \frac{|\overline{HL}|}{|\overline{LK}|} = \frac{|\overline{LN}| - |\overline{HN}|}{|\overline{LK}|}\text{, also } |\overline{HN}| \cdot (|\overline{LK}| + |\overline{NO}|) = |\overline{NO}| \cdot |\overline{LN}|.$$

Damit erhalten wir $|\overline{HN}| = \frac{b(a-b)}{a+b}$. Deswegen ist

$$|\overline{HM}| = |\overline{HN}| + |\overline{NM}| = \frac{b \cdot (a-b)}{a+b} + b = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b}$$

das harmonische Mittel der beiden Zahlen a und b.

Nach der bekannten Ungleichung zwischen geometrischen und harmonischen Mittelwerten zweier ungleicher positiver Zahlen gilt also $|\overline{GM}| > |\overline{HM}|$. Damit liegt H im Inneren des THALESkreises über $\overline{JP}$, und daher ist der Winkel $\sphericalangle PHJ$ stumpf.

Um diese (als bekannt voraussetzbare) Folgerung näher zu begründen, stellen wir fest, dass H im Inneren der Strecke $\overline{GM}$ liegt und deshalb gilt

$$|\sphericalangle JPH| = |\sphericalangle MPH| < |\sphericalangle MPG| = |\sphericalangle JPG|$$

sowie $$|\sphericalangle HJP| = |\sphericalangle HJM| < |\sphericalangle GJM| = |\sphericalangle GJP|.$$

Wegen der Winkelsumme im Dreieck folgt hieraus $|\sphericalangle PHJ| > |\sphericalangle PGJ| = 90°$. ❑

Über ein Verhältnis von arithmetischen und geometrischen Mittelwerten

Aufgabe KZM 2024/25, 1-5A. Es sind $a_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ der arithmetische Mittel wert und $g_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$ der geometrische Mittelwert der natürlichen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n > 1)$. Mit S_n sei die folgende Behauptung bezeichnet:

„S_n : Ist $\frac{a_n}{g_n}$ eine natürliche Zahl, so ist $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$“.

(a) Man zeige, dass S_3 im Allgemeinen falsch ist.
(b) Man zeige: Es gibt eine natürliche Zahl $m > 1$, sodass für $x_2 = x_3 = x_4 = 1$ und $x_1 = m$ das Verhältnis $\frac{a_4}{g_4}$ eine natürliche Zahl ist.
(c) Man beweise, dass S_2 stets richtig ist.

Lösungshinweise zu Teil a): Es genügt, für $n = 3$ ein konkretes Beispiel anzugeben, das die Behauptung widerlegt. Für $x_1 = 27$, $x_2 = 8$ und $x_3 = 1$ finden wir

- für den arithmetischen Mittelwert $a_3 = \frac{27+8+1}{3} = \frac{36}{3} = 12$ und
- für den geometrischen Mittelwert $g_3 = \sqrt[3]{27 \cdot 8 \cdot 1} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{6^3} = 6$.

Folglich ist $\frac{a_3}{g_3} = \frac{12}{6} = 2$ eine ganze Zahl, jedoch gilt nicht die Gleichheit $x_1 = x_2 = x_3$. Also ist die Behauptung im Fall $n = 3$ im Allgemeinen falsch. ❑

Lösungshinweise zu Teil b): Setzen wir $m = 81 = 3^4$, so ist der zu untersuchende Quotient eine ganze Zahl, denn es gilt für $x_1 = 81$ und $x_2 = x_3 = x_4 = 1$

- für den arithmetischen Mittelwert $a_4 = \frac{81+1+1+1}{4} = \frac{84}{4} = 21$ und
- für den geometrischen Mittelwert $g_4 = \sqrt[4]{81 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = \sqrt[4]{3^4} = 3$,

also ist der Quotient $\frac{a_4}{g_4} = \frac{21}{3} = 7$ eine natürliche Zahl. ❑

Ergänzung: Setzen wir allgemein für eine natürliche Zahl m voraus, dass das Verhältnis aus arithmetischem und geometrischem Mittelwert, also $v = \frac{m+1+1+1}{4 \cdot \sqrt[4]{m \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}}$, eine ganze Zahl ist, so muss auch $\sqrt[4]{m}$ rational (und damit ganzzahlig) sein. Sei deshalb $m = y^4$ mit einer natürlichen Zahl y. Dann gilt:

$$v = \frac{y^4 + 3}{4y} = \frac{1}{4} \cdot \left(y^3 + \frac{3}{y}\right).$$

Weil v laut Voraussetzung eine ganze Zahl ist, ist der Zähler $y^4 + 3$ durch 4 teilbar. Damit der Klammerausdruck ganzzahlig wird, muss $y = 1$ oder $y = 3$ sein. Folglich ist $m = 81$ die einzige nichttriviale Lösung für diese Aufgabenstellung.

Lösungshinweise zu Teil c): Es sei $a = \frac{x_1+x_2}{2}$, $g = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$ und $a = v \cdot g$ mit einer ganzen Zahl v. Da a rational ist, ist folglich auch g rational und als Wurzel aus einem Produkt natürlicher Zahlen sogar ganzzahlig. Nach dem Wurzelsatz von VIETA sind x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 2a \cdot x + g^2 = 0.$$

Die Diskriminante D dieser quadratischen Gleichung

$$D = a^2 - g^2 = (v \cdot g)^2 - g^2 = g^2 \cdot (v^2 - 1)$$

ist aber nur dann eine Quadratzahl, wenn der Klammerausdruck eine Quadratzahl ist. Dies kann aber nur für $v = 1$ eine Quadratzahl sein, da für größere Werte von v der Abstand zweier Quadratzahlen größer als 1 ist. Folglich ist wegen $D = 0$ die Gleichheit $x_1 = x_2$ bewiesen. ❑

Lösungsvariante: Auch ohne die etwas trickreiche Anwendung des Satzes von VIETA gelingt der Nachweis, wenn wir $x_2 = x_1 + 2 \cdot z$ mit einer geeignet gewählten Zahl z festlegen. Dann bedeutet die Aussage, dass aus einem ganzzahligen Quotienten aus arithmetischen und geometrischen Mittelwerten $z = 0$ folgt.

Ausgehend von $a = \frac{x_1+x_2}{2}$, $g = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$ und $a = v \cdot g$ mit einer ganzen Zahl v folgt

$$x_1 + z = v \cdot \sqrt{x_1 \cdot (x_1 + 2z)}$$

also $x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot z + z^2 = v^2 \cdot (x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot z)$

Betrachten wir die letzte Gleichung als Funktion der Variablen z, so können wir mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen nach z auflösen:

$$z^2 + 2 \cdot (1 - v^2) \cdot x_1 \cdot z + (1 - v^2) \cdot x_1^2 = 0$$
$$z_{1/2} = -(1 - v^2) \cdot x_1 \pm \sqrt{(1 - v^2)^2 \cdot x_1^2 - (1 - v^2) \cdot x_1^2}$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen kann zu $x_1^2 \cdot v^2 \cdot (v^2 - 1)$ zusammengefasst werden. Wie oben bereits diskutiert, kann dies nur für $v = 1$ eine Quadratzahl sein, was aber $z = 0$ bedeutet.

Die Aufgabe wurde aus der Aufgabe 3 der 2. Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik 1975 abgeleitet[5]. Ursprünglich lautete sie

„Man beweise S_2 und widerlege S_n mindestens für alle geraden Zahlen $n > 2$".

Den Beweis für $n = 2$ haben wir oben in der Teilaufgabe c) bereits erbracht.

In Teilaufgabe a) wurde gezeigt, dass die Aussage S_3 im Allgemeinen falsch ist. Es genügt bei solcher Fragestellung, ein geeignetes Beispiel „vorzurechnen“.

In Teilaufgabe b) wurde gezeigt, dass auch die Aussage S_4 im Allgemeinen falsch ist. Wir zeigen nun, dass die Konstruktionsidee für dieses Gegenbeispiel auf alle geraden Zahlen $n > 2$ übertragbar ist.

Wir setzen $x_1 = (n-1)^n$ und $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 1$. Wir erhalten

$$a_n = \frac{(n-1)^n + (n-1) \cdot 1}{n} = (n-1) \cdot \frac{(n-1)^{n-1} + 1}{n},$$
$$g_n = \sqrt[n]{(n-1)^n \cdot 1^{n-1}} = n - 1,$$

d.h. es gilt $\frac{a_n}{g_n} = \frac{(n-1)^{n-1}+1}{n}$. Um nachzuweisen, dass $\frac{a_n}{g_n}$ für gerade Zahlen ganzzahlig ist, verwenden wir die bekannte Formel für reelle Zahlen a, b und ungerade Zahlen m

$$a^m + b^m = (a+b) \cdot (a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1}) \qquad (\#),$$

mit der wir mit den Festlegungen $m = n - 1$, $a = n - 1$ und $b = 1$ erhalten, dass $(n-1)^{n-1} + 1^{n-1}$ durch $(n-1) + 1 = n$ teilbar ist.

[5] Diese Aufgabe wurde im Bundeswettbewerb Mathematik 1975 (2. Runde) gestellt. Vgl. K.R. Löffler (Hrsg..): Bundeswettbewerb Mathematik. Aufgaben und Lösungen 1972-1982. Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1987, S. 75.10

Die Aufgabenformulierung „mindestens für gerade Zahlen $n > 2$“ lässt vermuten, dass der Nachweis für ungerade Zahlen n besonders anspruchsvoll sein wird (und für eine vollständige Lösungsdarstellung im Wettbewerb nicht erforderlich war).

Für Primzahlen $p > 5$ zeigt sich, dass das p-Tupel mit

$$x_1 = (p-2)^{p-1},\, x_2 = (p-2)\cdot\left(\tfrac{p-1}{2}\right)^p \text{ und } x_3 = x_4 = \cdots = x_p = 1$$

die Aussage S_p widerlegt. (Für die Angabe dieses Tupel ist keine Beschreibung einer Herleitung erforderlich.) Wir erhalten tatsächlich

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{1}{p}\cdot\left((p-2)^{p-1} + (p-2)\cdot\left(\frac{p-1}{2}\right)^p + (p-2)\cdot 1\right) \\ &= \tfrac{p-2}{p}\cdot\left((p-2)^{p-2} + \left(\tfrac{p-1}{2}\right)^p + 1\right), \\ g_p &= \sqrt[p]{(p-2)^{p-1}\cdot(p-2)\cdot\left(\frac{p-1}{2}\right)^p\cdot 1^{p-2}} = (p-2)\cdot\left(\frac{p-1}{2}\right). \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $S_p = \frac{(p-2)^{p-2}+\left(\frac{p-1}{2}\right)^p+1}{p\cdot\frac{p-1}{2}}$ für alle $p > 3$ eine ganze Zahl ist.

Mit Anwendung der Gleichung (#) mit den Festlegungen $m = p-2$, $a = p-2$ und $b = 1$ ist $(p-2)^{p-2} + 1^{p-2}$ durch $(p-2)+1 = p-1$ und damit erst recht durch $\frac{p-1}{2}$ teilbar. Damit ist der Zähler des Quotienten durch $\frac{p-1}{2}$ teilbar.

Multiplizieren wir diesen Zähler Z mit 2^p, so können wir dessen Teilbarkeit durch p wie folgt nachweisen:

$$2^p\cdot Z = 2^p(p-2)^{p-2} + (p-1)^p + 2^p = 2^p(up - 2^{p-2}) + vp - 1 + 2^p,$$

wobei die ganzzahligen Faktoren u und v aus der jeweiligen Zusammenfassung aller Glieder mit dem Faktor p nach Anwendungen der binomischen Formel resultieren. Wir setzen die Umformung fort und erhalten

$$\begin{aligned} 2^p\cdot Z &= p\cdot(2^p\cdot u + v) - 2^{2p-2} + 2\cdot 2^{p-1} - 1 \\ &= p\cdot(2^p\cdot u + v) - (2^{p-1} - 1)^2\,. \end{aligned}$$

Nun gilt

$$2^{p-1} - 1 = \frac{1}{2}((1+1)^p - 2) = \frac{1}{2}\cdot\left(1 + \sum_{i=1}^{p-1}\binom{p}{i} + 1 - 2\right) = \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p}{i}.$$

Da die verwendeten Binomialkoeffizienten durch p teilbar sind, ist auch $2^{p-1} - 1$ und damit $2^p\cdot Z$ und deshalb auch Z durch p teilbar. Insgesamt ist der Zähler also durch $p\cdot\frac{p-1}{2}$ teilbar, d.h. $\frac{a_p}{g_p}$ ist ganzzahlig und damit S_p widerlegt.

Für alle ungeraden Zahlen $n > 1$, die keine Primzahlen sind, existiert eine Primzahl $p > 2$ und eine ungerade Zahl m mit $n = m \cdot p$. Für p haben wir gezeigt, dass es ein p-Tupel $x_1, x_2, \dots, x_p$ aus nicht lauter gleichen Zahlen gibt, für die $\frac{a_p}{g_p}$ ganzzahlig ist. Betrachten wir das $m \cdot p$-Tupel

$$\underbrace{x_1}_{m-mal}, \underbrace{x_2}_{m-mal}, \dots, \underbrace{x_p}_{m-mal},$$

so finden wir $a_n = a_{mp} = a_p$ und $g_n = g_{mp} = g_p$ und damit ist auch $\frac{a_n}{g_n} = \frac{a_p}{g_p}$ ganzzahlig, obwohl das $m \cdot p$-Tupel aus nicht lauter gleichen Zahlen besteht. Dies widerlegt die Aussage S_n. ❑

Die Idee der Vervielfachung der Tupel lässt sich auch für eine rekursive Konstruktion nutzen. Wir betrachten dazu ein m-Tupel $x_1, x_2, \dots, x_m$ mit arithmetischem Mittelwert a_x und geometrischem Mittelwert g_x sowie ein n-Tupel $y_1, y_2, \dots, y_n$ mit arithmetischem Mittelwert a_y und geometrischem Mittelwert g_y. Sind diese Mittelwerte jeweils gleich, gilt also $a_x = a_y = a$ und $g_x = g_y = g$, dann hat auch das $(m+n)$-Tupel, bestehend aus $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n$, den arithmetischen Mittelwert $a_{xy} = a$ und den geometrischen Mittelwert $g_{xy} = g$.

$$a_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i}{m+n} = \frac{m \cdot a_x + n \cdot a_y}{m+n} = \frac{(m+n) \cdot a}{m+n} = a\,.$$

$$g_{xy} = \sqrt[m+n]{\prod_{i=1}^{m} x_i \cdot \prod_{i=1}^{n} y_i} = \sqrt[m+n]{g_x^m \cdot g_y^n} = \sqrt[m+n]{g^{m+n}} = g\,.$$

Wenn es uns nun gelingt, einige Tupel mit gleichem arithmetischem Mittelwert sowie gleichem geometrischem Mittelwert zu finden, die die dazu passende zu untersuchende Aussage widerlegen, so können wir daraus weitere Tupel mit gleichen Eigenschaften konstruieren[6]. Eine Beschreibung der Herleitung der (zweifellos schwierig zu findenden) Beispiele ist dafür nicht erforderlich.

S_n	Tupel	a_n	g_n
S_3	27, 8, 1	$\frac{27+8+1}{3} = \frac{36}{3} = 12$	$\sqrt[3]{27 \cdot 8 \cdot 1} = 6$
S_5	27,24,6,2,1	$\frac{27+24+6+2+1}{5} = \frac{60}{5} = 12$	$\sqrt[5]{27 \cdot 24 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1} = 6$
S_7	36,18,18,6,4,1,1	$\frac{36+18+18+6+4+1+1}{7} = \frac{84}{7} = 12$	$\sqrt[7]{36 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1} = 6$

(a) Mit der Widerlegung von S_3 sind somit auch $S_{3+3}, S_{3+2\cdot 3}, \dots, S_{3+k\cdot 3}$ widerlegt $(k = 1,2,3,\dots)$.

[6] Siehe Beitrag „Erzeugung von (Gegen-) Beispielen mittels Rekursion“, Heft 06/2022.

(b) Mit der Widerlegung von S_5 sind somit auch $S_{5+3}, S_{5+2\cdot 3}, \dots, S_{5+k\cdot 3}$ widerlegt ($k = 1,2,3,\dots$).
(c) Mit der Widerlegung von S_7 sind somit auch $S_{7+3}, S_{7+2\cdot 3}, \dots, S_{7+k\cdot 3}$ widerlegt ($k = 1,2,3,\dots$).

Wir erkennen, dass S_4 bei diesen Ergebnissen noch nicht erfasst ist. Wir haben aber oben in Teilaufgabe b) bereits gezeigt, dass das 4-Tupel (81, 1, 1, 1) die betreffende Aussage widerlegt. Wir prüfen noch, dass mit dem Konstruktionsprinzip tatsächlich alle Zahlen $n > 2$ erfasst werden.

- Ist $n > 5$ eine durch 3 teilbare Zahl, dann lässt sie sich mit dem Konstruktionsschritt (a) erfassen.
- Lässt $n > 6$ bei Division durch 3 den Rest 1, dann gibt es eine Zahl k mit $n = 3k + 1 = 7 + 3(k - 2)$. Somit kann dieses n mit dem Konstruktionsschritt (c) erfasst werden.
- Lässt $n > 4$ bei Division durch 3 den Rest 2, dann gibt es eine Zahl k mit $n = 3k + 2 = 5 + 3(k - 1)$. Somit kann dieses n mit dem Konstruktionsschritt (b) erfasst werden.
- Zusammen mit den gesondert überprüften Fällen $n = 3$ und $n = 4$ werden also alle natürlichen Zahlen $n > 2$ erfasst.

Auch wenn es für den Beweis nicht erforderlich ist, wollen wir noch zeigen, dass mit den Konstruktionsschritten (a) bis (c) die Darstellung der Zahl n eindeutig bestimmt ist. Nehmen wir für einen indirekten Beweis an, es gäbe Zahlen $j_1, j_2 \in \{3; 5; 7\}$ und natürliche Zahlen $k_1, k_2 \in \{1, 2, 3, \dots\}$ mit

$$n = j_1 + 3 \cdot k_1 = j_2 + 3 \cdot k_2 \,.$$

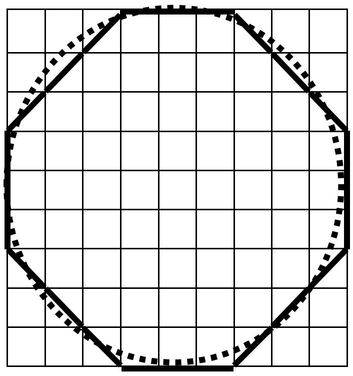
Dann gilt offenbar $j_1 - j_2 = 3 \cdot (k_2 - k_1)$. Im Fall $k_1 \neq k_2$ wäre die linke Seite dieser Gleichung ungleich 0 und durch 3 teilbar. Es ist aber nicht möglich, zwei Elemente aus $\{3; 5; 7\}$ so auszuwählen, dass sie diese Eigenschaften haben. Also gilt $k_1 = k_2$ und somit auch $j_1 = j_2$, d.h. die Darstellung für n ist eindeutig.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Die Quadratur des Kreises gehört zu den klassischen Problemen der Geometrie: Man konstruiere mit Zirkel und Lineal aus einem gegebenen Kreis ein flächengleiches Quadrat. Über Jahrtausende versuchten Mathematiker, aber auch Laien, nach einer Lösung. Jedoch erst im Jahre 1882 wurde vom deutschen Mathematiker FERDINAND VON LINDEMANN[7] bewiesen, dass die Kreiszahl π transzendent und somit die Konstruktion allein mit Zirkel und Lineal unmöglich ist. Es sind viele Näherungskonstruktionen[8] für die Quadratur bekannt. Die Beschäftigung mit deren

[7] geb. 12. April 1852 in Hannover; gest. 6. März 1939 in München
[8] Siehe beispielsweise https://de.wikipedia.org/wiki/Quadratur_des_Kreises

Approximationsgüte ist eine interessante (leichte) Übung zur Berechnung von Dreiecksflächen. Durch Vergleich der Kreis- und Quadratflächen kann der dabei verwendete Näherungswert für π angegeben werden.



In einer der ältesten bekannten Quadratur-Konstruktion aus dem *Papyrus Rind*[9] wird der Kreisdurchmesser in neun gleichgroße Teile ($d = 9$) geteilt, so dass die Kreisfläche mit $A_{Kreis} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot d^2 \approx 63.617$ angegeben werden kann. Nun konstruierte man als Näherung ein Achteck in das 9×9-Feld (s. Abbildung). An jeder Ecke wurde also eine Fläche von 4.5 Kästchen abgeschnitten. Damit hat das Achteck die Fläche von $A_{Achteck} = 9^2 - 4 \cdot 4.5 = 63$. Dies entspricht ein Näherungswert für die Kreiszahl von $\pi = \frac{A_{Achteck}}{\frac{1}{4} \cdot 9^2} \approx 3.111$ (ungefähr 99% des tatsächlichen Wertes!).

Während man nach Möglichkeiten der Quadratur des Kreises suchte, wurden auch für andere krummlinig begrenzte Flächen die vergleichbare Fragestellung gestellt. Mit den Möndchen des Hippokrates, die dem griechischen Mathematiker Hippokrates von Chios (um 450 v. Chr.) zugeschrieben werden, konnte man bereits im antiken Griechenland nachweisen, dass solche Flächenstücke durch rationale Zahlen berechnet werden können.

In

Dietmar Herrmann

Die antike Mathematik
Geschichte der Mathematik in Alt-Griechenland und im Hellenismus

Springer-Verlag GmbH Berlin, (2. Auflage) 2020.

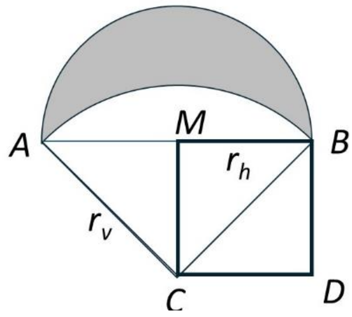
Kapitel 5 – Hippokrates von Chios (Seiten 69 – 76)

werden vier Konstruktionsmöglichkeiten[10] angegeben, die eine Quadratur mit Zirkel und Lineal ermöglichen. Aufgrund der speziellen Maße dieser Konstruktionen bieten diese Untersuchungen (jedoch anders als ursprünglich beabsichtigt) keinen Ansatz zur Lösung des eigentlichen Problems zwischen Kreis und Quadrat.

---

[9] altägyptische, auf Papyrus verfasste Abhandlung zu verschiedenen mathematischen Themen, (um 1550 v. Chr.)

[10] Die Werke des Hippokrates von Chios sind nicht überliefert. Jedoch werden die nachfolgenden Konstruktionen ihm zugeschrieben, da in späteren Schriften auf ihn Bezug genommen wird.



Konstruktion 1: (nach ALEXANDER VON APHRODISIAS[11]) Über der Hypotenuse eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks ΔABC wird (außerhalb des Dreiecks) ein Halbkreis gezeichnet (THALESkreis). Die Spitze S des Dreiecks ist der Mittelpunkt eines Viertelkreises.

Es gilt: Die Fläche zwischen Halb- und Viertelkreis wird als Möndchen bezeichnet. Die Fläche des Möndchens entspricht der Fläche des Quadrates $MCDB$.

Beweis: Laut Konstruktion gilt für die Radien des Halbkreises r_h und des Viertelkreises r_v der Zusammenhang $r_v = r_h \cdot \sqrt{2}$.

Weiterhin lesen wir für die Flächeninhalte aus der Skizze ab:

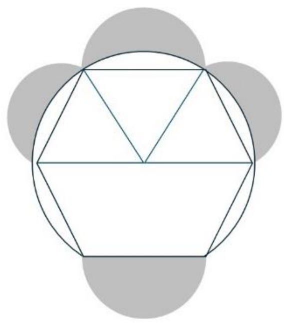
$$A_{Möndchen} + A_{Viertelkreis} = A_{Halbkreis} + A_{ABC} \text{ ,}$$

d.h.,

$$A_{Möndchen} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_h^2 + \frac{1}{2} \cdot r_v^2 - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r_v^2 \text{ ,}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_h^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot r_h^2 - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2 \cdot r_h^2 = r_h^2 \text{ .}$$

Die Quadratur des Möndchens ist gelungen! ❑

Konstruktion 2: Ein gleichschenkliges Trapez ist gegeben als Hälfte eines regulären Sechsecks mit der Seitenlänge a. Über den drei gleichlangen Seiten des Trapezes werden Halbkreise konstruiert, die zusammen mit dem Umkreis des Sechsecks drei Möndchen bilden.



Es gilt: Die Flächensumme der drei Möndchen zusammen mit dem Halbkreis über dem Umkreisradius ist flächengleich zum Trapez.

Beweis: Für den gesuchten Flächeninhalt lesen wir aus der Skizze ab:

$$A_{Möndchen} = A_{Halbkreis} + A_{Dreieck} - A_{Sechstelkreis}$$
$$= \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot a^2 + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot a^2$$
$$= \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{24} \cdot \pi \cdot a^2 \text{ .}$$

Also beträgt der gesuchte Flächeninhalt A

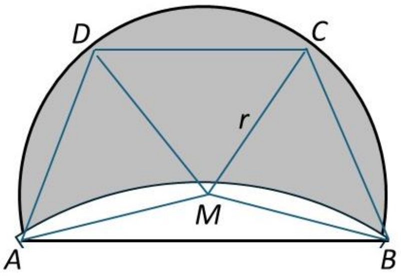
$$A = 3 \cdot A_{Möndchen} + A_{Halbkreis}$$

[11] 2. Jh. n. Chr.

$$= \frac{3}{2} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot a^2 + \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot a^2 = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}\,.$$

Die betrachtete Fläche ist somit mit rationalen Zahlen darstellbar. ❑

Nun können wir mit Hilfe des Höhensatzes im rechtwinkligen Dreieck mit den Hypotenusenabschnitten $\frac{3}{2} \cdot a$ und $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{3}$ die Seitenlänge eines flächengleichen Quadrates konstruieren: $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{3}}$.



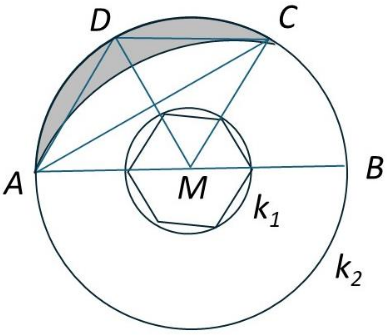
Konstruktion 3: (nach EUDEMOS VON RHODOS[12]) Ein Trapez $ABCD$ mit drei gleichlangen Seiten $|\overline{BC}| = a$, $\overline{CD}$ und $\overline{AD}$ sowie der Grundseite $\overline{AB}$ mit $|\overline{AB}| = |\overline{AD}| \cdot \sqrt{3}$ ist gegeben. Dieses Trapez ist ein Sehnenviereck, weil $|\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle DCB| = 180°$ aufgrund der Parallelen AB und CD und deshalb auch $|\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle ADC| = 180°$. Deshalb existiert ein Umkreis um dieses Trapez, der nun konstruiert wird. Zudem wird der zum Kreisbogen $\widehat{AD}$ ähnlichen Kreisbogen über $\widehat{AB}$ konstruiert.

Es gilt: Der Flächeninhalt des Möndchens ist so groß wie der Flächeninhalt des Trapezes.

Beweis: Die Ähnlichkeit der Kreisbögen überträgt sich auf deren Flächeninhalte, d.h. es gilt $A_{\widehat{AB}} = 3 \cdot A_{\widehat{AD}}$. Damit finden wir (ohne die Trapezfläche konkret auszurechnen)

$$A_{Möndchen} = A_{Trapez} + 3 \cdot A_{\widehat{AD}} - A_{\widehat{AB}} = A_{Trapez}\,.$$

❑



Konstruktion 4: Wir zeichnen ein reguläres Sechseck und seinen Umkreis k_1 mit Mittelpunkt M. Nun konstruieren wir um M einen zu k_1 konzentrischen Kreis k_2. Die Radien sollen sich dabei wie $1 : \sqrt{6}$ verhalten. Von M aus zeichnen wir die drei Geraden durch benachbarte Eckpunkte des Sechsecks, deren Schnittpunkte mit der Kreislinie von k_2 mit A, D bzw. C bezeichnet werden. Schließlich sei der Kreisbogen über AC äquivalent zum Kreisbogen auf k_2 über AD.

Es gilt: Die Flächensumme des Möndchens und des Kreises k_1 ist gleich der Flächensumme des Dreiecks ΔACD und des von k_1 umschriebenen Sechsecks.

Beweis: Da $\overline{AC}$ gleich der doppelten Höhe im gleichseitigen Dreieck ΔAMD ist, gilt $|\overline{AC}| = |\overline{AM}| \cdot \sqrt{3}$. Für die äquivalenten Kreisbögen folgt daraus $A_{\widehat{AC}} = 3 \cdot A_{\widehat{AD}}$. Aufgrund des Verhältnisses $1 : \sqrt{6}$ der Radien der Kreise k_1 und k_2 finden wir

[12] um 325 v. Chr.

$$A_{Möndchen} + A_{k_1} = A_{Kreissegment\ AMCD} - A_{\widehat{AC}} - A_{AMC} + A_{k_1}$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(r_1 \cdot \sqrt{6}\right)^2 - 3 \cdot A_{\widehat{AD}} - \frac{1}{2} \cdot \left(r_1 \cdot \sqrt{6}\right)^2 \cdot \sqrt{3} + \pi \cdot r_1^2 .$$

Wir verwenden $A_{\widehat{AD}} = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot \left(r_1 \cdot \sqrt{6}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(r_1 \cdot \sqrt{6}\right)^2 \cdot \sqrt{3} = \pi \cdot r_1^2 - 3 \cdot r_1^2 \cdot \sqrt{3}$ und vereinfachen die bisherige Gleichung zu

$$A_{Möndchen} + A_{k_1} = 3 \cdot \pi \cdot r_1^2 - 3 \cdot \left(\pi \cdot r_1^2 - 3 \cdot r_1^2 \cdot \sqrt{3}\ \right) - 3 \cdot r_1^2 \cdot \sqrt{3}$$
$$= 6 \cdot r_1^2 \cdot \sqrt{3} = 6 \cdot \frac{1}{2} r_1^2 \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot \left(r_1 \cdot \sqrt{6}\right)^2 \cdot \sqrt{3}$$
$$= A_{Sechseck} + A_{ACD} .$$

❑

Bekannte Sätze der Mathematik[13]

Satz. Für alle positiven reellen Zahlen a und b gelten die Ungleichungen zwischen den harmonischen, geometrischen, arithmetischen und quadratischen Mittelwerten:

$$\min(a,b) \leq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \max(a,b)$$

Beweise:

(1) Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetischen Mittelwerten: Für alle reellen Zahlen gilt $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$.
Addieren wir auf beiden Seiten den Term $4ab$ und dividieren wir beide Seiten durch 4, so finden wir

$$ab \leq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{(a+b)^2}{4},$$

woraus durch Radizieren (das wegen $a > 0$ und $b > 0$ erlaubt ist) die behauptete Ungleichung unmittelbar folgt.

(2) Ungleichung zwischen harmonischen und geometrischen Mittelwerten: Für zwei positive reelle Zahlen a und b betrachten wir ihre Reziproken $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$, die selbst wieder positive reelle Zahlen sind. Für diese Reziproken kann folglich die unter (1) bewiesene Ungleichung angewandt werden und es gilt:

$$\sqrt{\frac{1}{a \cdot b}} \leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$$

[13] Siehe auch Heft 01/2022

Bilden wir von beiden Seiten wiederum die Reziproken (unter Beachtung der Umkehrung des Relationszeichens), so folgt die behauptete Ungleichung.

(3) Ungleichung zwischen arithmetischen und quadratischen Mittelwerten: Aus der für reellen Zahlen a und b gültigen Ungleichung $(a-b)^2 \geq 0$, also $2ab \leq a^2 + b^2$, folgt durch Ausmultiplizieren und einfaches Umformen

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \,.$$

Dividieren wir beide Seiten durch 4 und radizieren, so erhalten wir die behauptete Ungleichung.

(4) Gilt $a \leq b$ und damit $\min\{a;b\} = a \leq b = \max\{a;b\}$, so erhalten wir einerseits $\frac{a}{b} \leq 1$. Damit finden wir aus $2 \geq 1 + \frac{a}{b} = a \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ die linke äußere Abschätzung $a \leq \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$. Andererseits folgt wegen $b^2 \geq \frac{a^2+b^2}{2}$ die rechte äußere Abschätzung.

18. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade

Die Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade (MeMO[14]) ist ein staatenübergreifender Mathematikwettbewerb, der 2007 erstmalig ausgerichtet wurde und an dem seit 2014 die zehn Länder Deutschland, Kroatien, Litauen, Polen, Österreich, Schweiz, Slowakei, Slowenien, Tschechien und Ungarn teilnehmen. Er bietet Jugendlichen (in Deutschland der Jahrgangsstufen 10 und 11) eine zur Internationalen Mathematik-Olympiade (IMO) zusätzliche Möglichkeit, an internationalen Vergleichen teilzunehmen. Dabei wird jedoch die Doppel-Teilnahme an MeMO und IMO in einem Kalenderjahr per Reglement ausgeschlossen.

Jedes teilnehmende Land entsendet sechs Schüler zur MeMO. Es gibt sowohl einen Einzel- als auch einen Mannschaftswettbewerb. Jeder Teilnehmende schreibt am ersten Wettkampftag eine fünfstündige Individualklausur. Am Folgetag steht die ebenfalls fünfstündige Teamklausur auf dem Programm. Die vier Aufgabenstellungen des Einzelwettbewerbs und die acht Probleme für die Teamentscheidung orientieren sich im Schwierigkeitsgrad am Niveau der IMO. Es sind je Aufgabe 8 Punkte möglich. Wie auch zur IMO wird die siebentägige Veranstaltung von einem reichhaltigen Exkursionsprogramm umrahmt.

In diesem Jahr fand die MeMO vom 24. bis 30. August 2024 in Szeged (Ungarn) statt. Insgesamt wurden an die 60 Teilnehmenden 4 Gold-, 12 Silber- und 15 Bronze-Medaillen vergeben. Zusätzlich erhielten 17 Teilnehmende, die es nicht auf einen Medaillenplatz schafften, aber bei mindestens einer Aufgabe die volle Punktzahl

[14] www.memo-official.org

erreichten, eine ehrende Erwähnung. Zwei Starter (aus Kroatien und Ungarn) schafften im Individualwettbewerb die Idealpunktzahl 32.

Verwenden wir für eine Länderwertung den Modus der IMO, die Platzierung anhand der Summe der sechs Einzelleistungen festzulegen, erreichte Deutschland mit 114 von 192 möglichen Punkten den Platz 4 (2023: 112 Punkte/Platz 5; 2022: 104 Punkte/Platz 2; 2021: 59 Punkte/Platz 4).

Platz	2024	Punkte	Gold	Silber	Bronze	Ehrende Erwähnung
1	Polen	151	2	3	1	-
2	Kroatien	135	1	3	1	1
3	Ungarn	116	1	-	4	1
4	Deutschland	114	-	2	2	2
5	Slowakei	112	-	1	3	2
6	Tschechien	109	-	1	3	2
7	Schweiz	84	-	1	-	4
8	Litauen	64	-	-	1	2
9	Österreich	59	-	1	-	1
10	Slowenien	55				2

Für die offizielle Länderwertung wird aber der Teamwettbewerb zugrunde gelegt, in dem insgesamt 64 Punkte erreicht werden können. Das deutsche Team kam hierbei auf Platz 2 und erreichte damit ein hervorragendes Ergebnis im Vergleich zu den Vorjahren (nach 2023: 22 Punkte mit Platz 7 und 2022: 37 Punkte sowie 2021: 47 Punkte mit jeweils Platz 6).

Platz	Team	Punkte
1	Polen	56
2	Deutschland	49
3	Schweiz	48
	Slowakei	48
5	Ungarn	47
6	Litauen	39
7	Kroatien	33
	Tschechien	33
9	Slowenien	24
10	Österreich	18

Turnusgemäß wurde nach der 8. MeMO 2014 in Dresden die 19. MeMO wieder nach Deutschland vergeben[15]. Sie wird vom 25. bis 31. August 2025 in der Kulturhauptstadt Europas Chemnitz (siehe www.memo2025.de) stattfinden.

Termine

Technische Universität Chemnitz, Campustage für Schüler und Studieninteressierte, vom 15. bis 17. Oktober 2024, täglich von 09:00 bis 15:00 Uhr. Um sich seinen individuellen Besuchsplan vorzubereiten, gibt es Informationen unter https://www.tu-chemnitz.de/studierendenservice/zsb/campustage/

„Jugend forscht“ Onlineveranstaltung „Offene Sprechstunde – Tipps zur Anmeldung" (am 07. November 2024, 17:00 bis 18:00 Uhr) klärt zu Teilnahmebedingungen, dem Anmeldeprozess und der Datenbank, in der die Anmeldungen registriert werden, auf. Eigene konkrete Fragen können in die Veranstaltung eingebracht werden. Informationen und online-Anmeldung unter jugend-forscht.de

64. Mathematik-Olympiade, Runde 2 (Regionalausscheid), 18. November 2024.

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 8/2024

Aufgabe T–3 (Teamwettbewerb der 17. MeMO, 2023, Strečno/Slovakia)
Bestimme die kleinste ganze Zahl b mit der folgenden Eigenschaft: Für jede Art, exakt b Quadrate eines 8 × 8-Schachbretts grün zu färben, kann man immer 7 Läufer so auf 7 der grünen Felder stellen, dass keine zwei der Läufer sich gegenseitig bedrohen.

Bemerkung: Zwei Läufer bedrohen sich gegenseitig, wenn sie auf derselben Diagonalen stehen.

Lösungshinweise: Wir platzieren 40 Läufer auf 6 Diagonalen, wie in Abbildung 1 gezeigt. Wenn wir 7 beliebige der platzierten Läufer auswählen, befinden sich nach dem Schubfachprinzip mindestens zwei der ausgewählten Läufer auf derselben Diagonale, so dass sie sich gegenseitig angreifen. Die Anzahl b der ausgewählten Läufer ist also mindestens 41.

[15] Pandemie-bedingt wurde die 14. MeMO 2020 virtuell durchgeführt und damit keinem Veranstalterland zugeordnet.

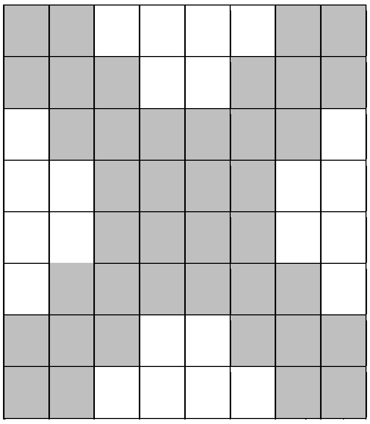


Abbildung 1

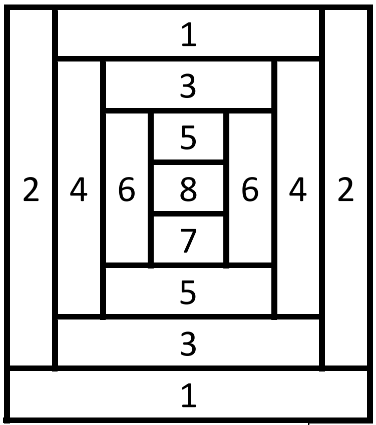


Abbildung 2

Nehmen wir nun an, dass die 41 Läufer so platziert sind, dass es keine 7 nicht angreifenden Läufer gibt. Unterteilen wir alle Spielsteine in 8 Gruppen, wie in Abbildung 2 gezeigt. Es ist leicht zu erkennen, dass zwei Läufer, die zur gleichen Gruppe gehören, sich nicht gegenseitig angreifen. Daher enthält jede Gruppe höchstens 6 Läufer. Außerdem enthalten die Gruppen 7 und 8 aufgrund ihrer Größe höchstens 2 Läufer. Wir haben also höchstens $6 \cdot 6 + 2 \cdot 2 = 40$ Läufer, was ein Widerspruch ist. Daher ist es möglich, aus einer beliebigen Anordnung von 41 Läufern 7 so auszuwählen, dass sich keine zwei Läufer gegenseitig angreifen. Zusammen mit der unteren Schranke von $b \geq 41$ ist diese Lösung damit abgeschlossen. ❑

Anmerkung (1). Eine schwächere Obergrenze von 49 kann wie folgt gezeigt werden: Betrachten wir eine Platzierung von 49 Läufern. Wir haben 8 Reihen und 49 : 8 > 6, also gibt es nach dem Schubfachprinzip eine Reihe mit mindestens 7 Läufern. Es ist klar, dass Läufer in der gleichen Reihe sich nicht gegenseitig angreifen.

Anmerkung (2). Dieses Problem kann für größere Dimensionen des Schachbretts und auch für eine größere Anzahl von gesuchten nicht angreifenden Läufern verallgemeinert werden.

Monatsaufgabe 10/2024[16].

Sei ΔABC ein Dreieck mit $\sphericalangle BAC = 60$. Sei D ein Punkt auf der Gerade AC, sodass $|\overline{AB}| = |\overline{AD}|$ gilt und A zwischen C und D liegt. Angenommen, es existieren zwei Punkte $E \neq F$ auf dem Umkreis des Dreiecks ΔDBC, sodass $|\overline{AE}| = |\overline{AF}| = |\overline{BC}|$ gilt.

Zeige, dass die Gerade EF duch den Umkreismittelpunkt von ΔABC verläuft.

[16] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 30.11.2024 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2024/25)

Ausgabe[17]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
10/2024 (Okt.)	Thema 04.3	Flächenberechnung	
09/2024 (Sept.)		Binomialkoeffizienten	MO631045
	Thema 04.2	Flächenberechnung	MO630946
08/2024 (Aug.)	Thema 29	Schubfachprinzip	MO631041 MO630941 MO630934

Impressum

Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz.

[17] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.