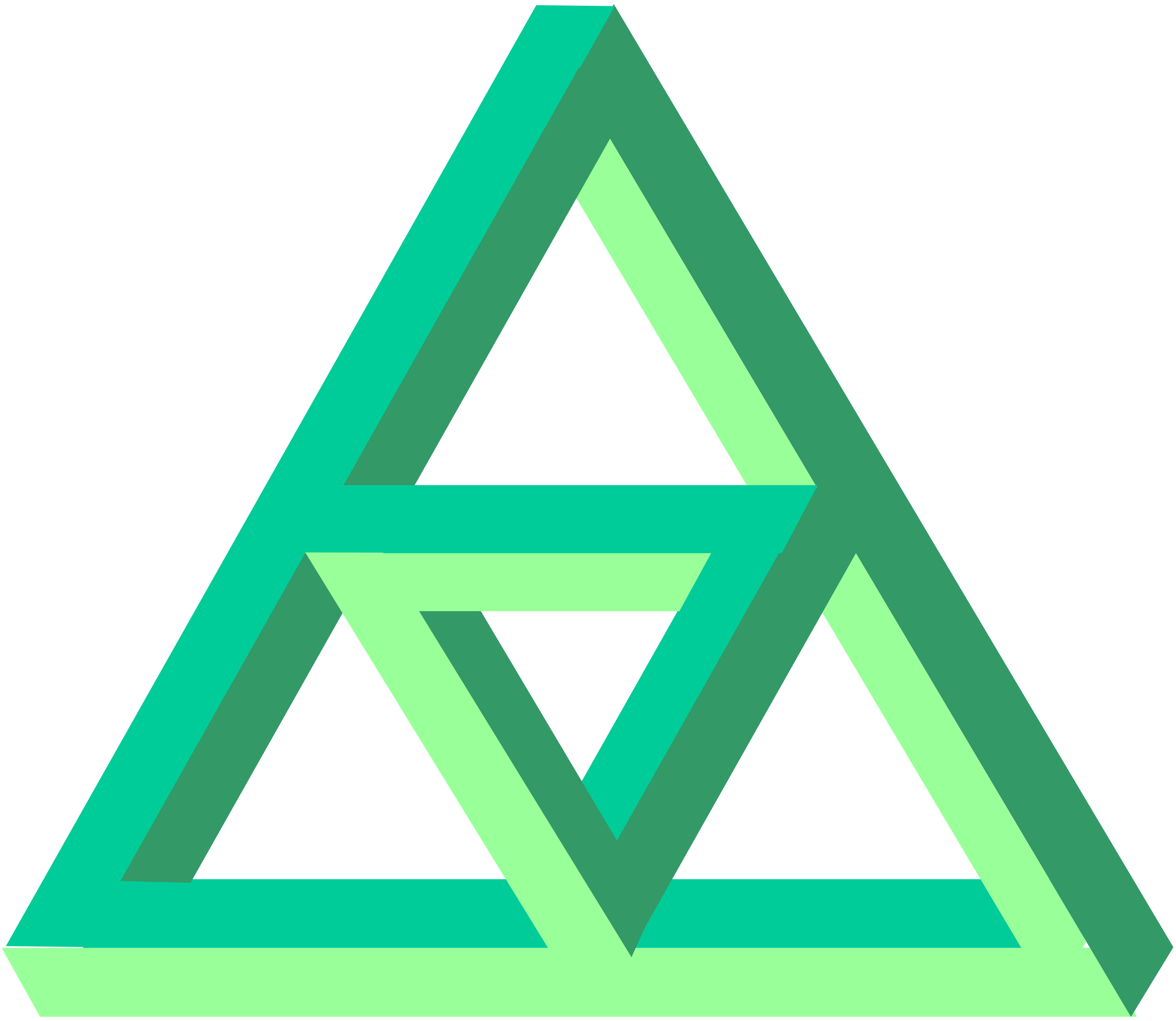
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 09/2024 (September 2024) 23. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir setzen den Rückblick auf die Aufgaben der Bundesrunde der 63. MO fort und greifen mit der Aufgabe **MO630946** das Thema Flächenberechnung auf. Bemerkenswert ist bei dieser Aufgabenstellung die Vielfalt der vom Aufgabenausschuss vorgestellten Lösungsmethoden – in den „Musterlösungen“ zur Bundesrunde werden fünf Varianten diskutiert! Wir ergänzen die Thematik durch Aufgaben, in denen die Eckpunkte der zu untersuchenden Figuren durch Koordinaten eines ebenen kartesischen Koordinatensystems beschrieben werden.

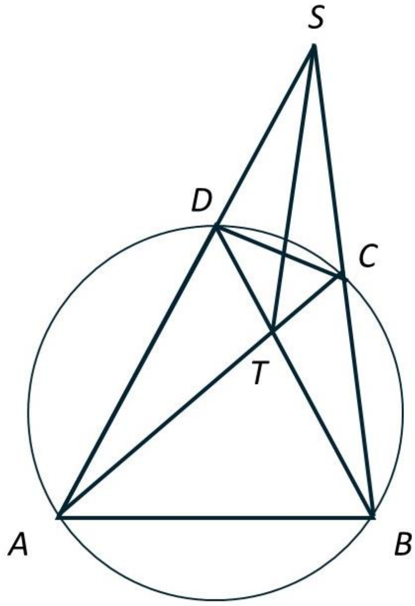
Wir nehmen die Aufgabe MO631041 zum Anlass, an den Binomialkoeffizient zu erinnern. Zur Einführung zitieren wir dazu aus einem Lehrbuch von 1895.

Wir informieren über das Fachgebiet Mathematik/Informatik im Bundeswettbewerb „Jugend forscht“, der 2025 zum 60. Mal ausgetragen wird. Wir möchten damit alle Jugendlichen motivieren, mathematische Fragestellungen zu untersuchen und im Wettbewerb zu präsentieren!

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 04.2– Flächenberechnung[3]

Aufgabe 4.06 – MO630946. Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, bei dem ΔABD ein gleichseitiges Dreieck ist. Der Schnittpunkt der Geraden AD und BC sei S, der Schnittpunkt der Geraden AC und BD sei T. Man zeige, dass die Dreiecke ΔATS und ΔBSD den gleichen Flächeninhalt haben.



Lösungshinweise: Es sei zunächst allgemein angemerkt, dass bei dieser Aufgabe der Punkt S immer auf derselben Seite der Geraden AB liegt wie die Punkte C, D und T. Dies folgt, da mit Umfangswinkelsatz[4] $|\measuredangle CBD| = |\measuredangle CAD| < |\measuredangle BAD| = 60°$ und somit

$$\begin{aligned}&|\measuredangle BAD| + |\measuredangle CBA| = |\measuredangle BAD| + |\measuredangle CBD| + |\measuredangle DBA| \\ &< 60° + 60° + 60° = 180°.\end{aligned}$$

Erste Lösung: Wir vergleichen beide Flächeninhalte mit dem Flächeninhalt des Dreiecks ΔACS. Zunächst gilt

$$A_{ATS} = \frac{|\overline{AT}|}{|\overline{AC}|} \cdot A_{ACS} \,,$$

denn das Verhältnis der Grundseiten auf der Geraden AC entspricht bei gleicher Höhe dem Verhältnis der Flächeninhalte. Weiterhin ist das Dreieck ΔBSD ähnlich zum Dreieck ΔASC, weil außer der Winkelgleichheit $|\measuredangle ASC| = |\measuredangle ASB| = |\measuredangle DSB|$ auch die Winkel $|\measuredangle CAS| = |\measuredangle CAD|$ und $|\measuredangle SBD| = |\measuredangle CBD|$ aufgrund des Umfangswinkelsatzes gleich groß sind. Somit ergibt sich

$$A_{BSD} = \left(\frac{|\overline{BD}|}{|\overline{AC}|}\right)^2 \cdot A_{ACS} \,.$$

Zu zeigen ist also noch

$$\frac{|\overline{AT}|}{|\overline{AC}|} = \left(\frac{|\overline{BD}|}{|\overline{AC}|}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|\overline{AT}|}{|\overline{BD}|} = \frac{|\overline{BD}|}{|\overline{AC}|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|\overline{AT}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} \,.$$

Letzteres folgt aber aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ΔABC und ΔATB (wegen $|\measuredangle BAT| = |\measuredangle BAC|$ und $|\measuredangle TBA| = 60° = |\measuredangle ADB| = |\measuredangle ACB|$ aufgrund des Umfangswinkelsatzes).

---

[3] Thema 04.1 im Heft 03/2021 mit Bezug zu Aufgabe MO601023.

[4] Umfangswinkelsatz (Peripheriewinkelsatz): Alle Umfangswinkel (Peripheriewinkel, d.h. Winkel mit Scheitelpunkt auf der Kreislinie) über einem Kreisbogen sind gleich groß. Dies gilt insbesondere über den Sehnen eines Sehnenvierecks, für dass es stets einen Umkreis gibt, auf dem die vier Eckpunkte liegen.

Zweite Lösung: Wir haben

$$|\sphericalangle DCT| = |\sphericalangle DCA| = |\sphericalangle DBA| = 60° = |\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BAS|$$

aufgrund Umfangswinkelsatz und

$$\begin{aligned}|\sphericalangle CTD| &= 180° - |\sphericalangle BTC| = |\sphericalangle CBT| + |\sphericalangle TCB| = |\sphericalangle CBT| + |\sphericalangle ACB| \\ &= |\sphericalangle CBT| + |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle SBD| + 60° = |\sphericalangle SBA|\,.\end{aligned}$$

Daher haben die Dreiecke ΔCDT und ΔASB gleich große Innenwinkel und sind damit ähnlich. Aus der Gleichseitigkeit des Dreiecks ΔABD folgt

$$\frac{|\overline{CT}|}{|\overline{DT}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{SB}|} = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{SB}|}$$

und weiter

$$|\overline{AD}| \cdot |\overline{DT}| = |\overline{SB}| \cdot |\overline{CT}|\,. \qquad (1)$$

Die Höhe h_{AD} von T auf AD ist durch $h_{AD} = |\overline{DT}| \cdot \sin|\sphericalangle ADT|$ gegeben und die Höhe h_{SB} von T auf SB durch $h_{SB} = |\overline{CT}| \cdot \sin|\sphericalangle TCB|$.

Wegen $|\sphericalangle ADT| = |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle TCB|$ folgt hieraus mit (1)

$$\begin{aligned}A_{ATD} &= \frac{1}{2} \cdot |\overline{AD}| \cdot h_{AD} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AD}| \cdot |\overline{DT}| \cdot \sin|\sphericalangle ADT| \\ &= \frac{1}{2} \cdot |\overline{SB}| \cdot |\overline{CT}| \cdot \sin|\sphericalangle TCB| = \frac{1}{2} \cdot |\overline{SB}| \cdot h_{SB} = A_{BST}\end{aligned}$$

und durch Addition der Fläche des Dreiecks ΔDTS schließlich $A_{ATS} = A_{BSD}$, was zu zeigen war.

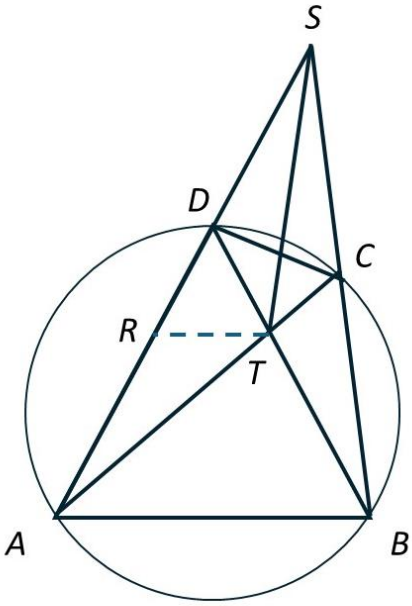
Dritte Lösung: Es sei R der Schnittpunkt der Parallelen zur Geraden AB durch T mit AD. Nun ist mit Wechselwinkel- und Nebenwinkelsatz im gleichseitigen Dreieck ΔABD

$$|\sphericalangle ART| = 120° = |\sphericalangle BDS|$$
und $|\sphericalangle TAR| = |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CBD|$

mit Umfangswinkelsatz. Daher sind die Dreiecke ΔATR und ΔBSD ähnlich, also

$$\frac{|\overline{AT}|}{|\overline{AR}|} = \frac{|\overline{BS}|}{|\overline{BD}|}$$

und wegen $|\overline{BD}| = |\overline{AD}|$ und $|\overline{AR}| = |\overline{BT}|$ im gleichschenkligen Trapez $ABTR$ auch



$$\frac{|\overline{AT}|}{|\overline{BT}|} = \frac{|\overline{BS}|}{|\overline{AD}|},$$

also

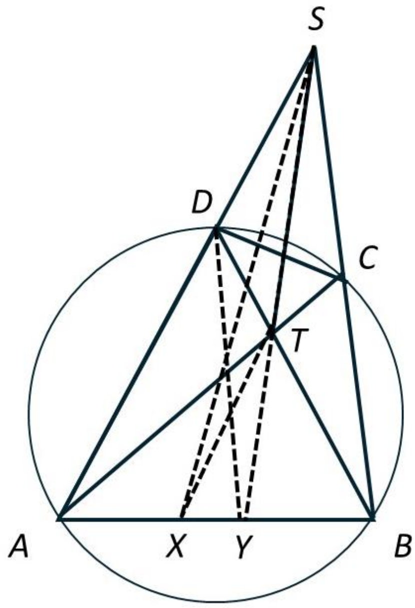
$$|\overline{AT}| \cdot |\overline{AD}| = |\overline{BS}| \cdot |\overline{BT}|.$$

Wegen $|\measuredangle TAD| = |\measuredangle CAD| = |\measuredangle CBD| = |\measuredangle SBT|$ mit Umfangswinkelsatz folgt daraus

$$A_{ATD} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AT}| \cdot |\overline{AD}| \cdot \sin|\measuredangle TAD| = \frac{1}{2} \cdot |\overline{BS}| \cdot |\overline{BT}| \cdot \sin|\measuredangle SBT| = A_{BST}$$

und durch Addition der Fläche des Dreiecks ΔDTS schließlich $A_{ATS} = A_{BSD}$, was zu zeigen war.

Vierte Lösung: (Mit Scherung und ohne Verwendung ähnlicher Dreiecke.) Es seien X und Y die Schnittpunkte der Strecke $\overline{AB}$ mit der Parallelen zur Geraden AS durch T bzw. mit der Parallelen zur Geraden BS durch D. Dann gilt $A_{ATS} = A_{AXS}$ und $A_{BSD} = A_{BSY}$. Es genügt also zu zeigen, dass die Strecken $\overline{AX}$ und $\overline{BY}$ gleich lang sind. Da aber nach Konstruktion $|\overline{BD}| = |\overline{DA}|$, $|\measuredangle DBY| = 60° = |\measuredangle ADT|$ und mit Wechselwinkel- und Umfangswinkelsatz $|\measuredangle YDB| = |\measuredangle CBD| = |\measuredangle CAD| = |\measuredangle TAD|$ gilt, ergibt sich die Kongruenz der Dreiecke ΔBDY und ΔDAT (Kongruenzsatz (WSW)), womit $|\overline{BY}| = |\overline{DT}|$ gilt. Ferner ist $DAXT$ ein gleichschenkliges Trapez, womit $|\overline{AX}| = |\overline{DT}| = |\overline{BY}|$ gilt, was zu zeigen war.

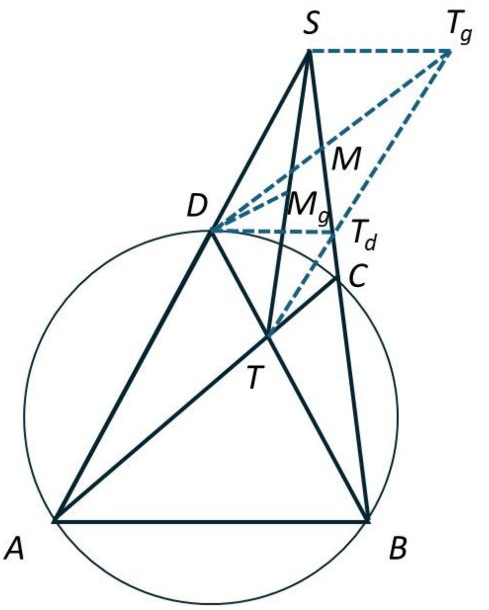


Fünfte Lösung: (Über Zerlegungsgleichheit mit Kongruenzabbildungen.) Es bezeichne d die Drehung um D, welche A in B überführt, und $T_d := d(T)$ das Bild von T unter d. Sei g die Geradenspiegelung an der Mittelsenkrechten von $\overline{DS}$ und p die Punktspiegelung am Mittelpunkt M der Strecke ST_d. Weiter sei $T_g := g(T)$ und $M_g := g(M)$.

Konstruktionsbedingt ist ΔDTT_d gleichseitig, also $TT_d \parallel DS$ (wegen $|\measuredangle T_dTD| = 60° = |\measuredangle ADT|$ und Umkehrung des Wechselwinkelsatzes) und $DT_d \parallel AB$ (wegen $|\measuredangle BDT_d| = 60° = |\measuredangle DBA|$ und Umkehrung des Wechselwinkelsatzes).

Konstruktionsbedingt ist DTT_gS ein gleichschenkliges Trapez mit Basiswinkel $|\measuredangle T_gTD| = |\measuredangle ADT| = 60°$ an der Basis $\overline{TT_g}$, die damit den Punkt T_d enthält. Mit $T_gT_d \parallel DS$ und $DT_d \parallel ST_g$ (wegen $|\measuredangle DST_g| = 180° - |\measuredangle T_gTD| = 120° = |\measuredangle ADT_d|$ und Umkehrung des Stufenwinkelsatzes) ist folglich DT_dT_gS ein Parallelogramm mit Symmetriezentrum M. Insbesondere liegt M somit auf DT_g und M_g auf $ST = g(DT_g)$.

Konstruktionsbedingt sind die Dreiecke ΔATD und ΔBT_dD kongruent, da $\Delta BT_dD = d(\Delta ATD)$. Da das Viereck $ABCD$ ein Sehnenviereck ist, gilt aber auch $|\measuredangle TAD| = |\measuredangle SBD|$, weswegen T_d auf BS liegen muss. Damit setzt sich das Dreieck ΔBSD aus den Dreiecken ΔBT_dD, ΔDT_dM und ΔDMS zusammen; ebenso setzt sich das Dreieck ΔATS aus den Dreiecken ΔATD, ΔTDM_g und ΔSM_gD zusammen. Weiter gilt:

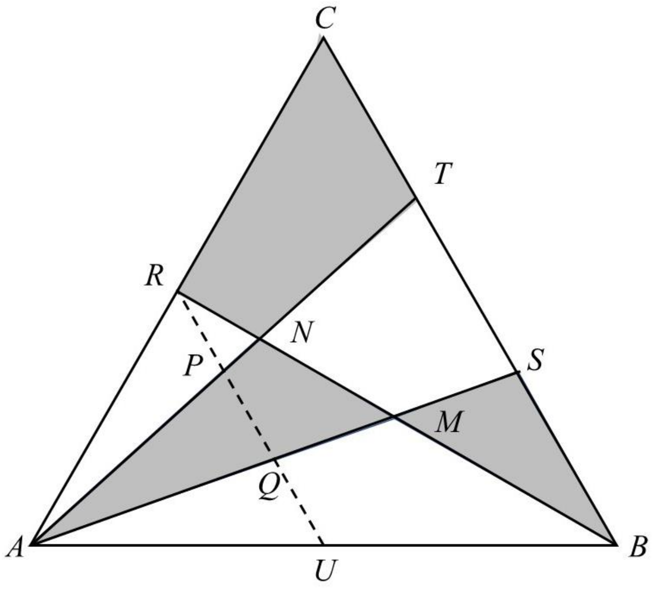


$$\Delta BT_dD = d(\Delta ATD)$$
$$\Delta DT_dM = p(\Delta T_gSM) = p(g(\Delta TDM_g))$$
$$\Delta DMS = g(\Delta SM_gD)$$

Die Behauptung folgt, da die Dreiecke ΔBSD und ΔATS somit zerlegungsgleich sind.

❑

Aufgabe 4.07 – MO430936/MO431036. Im Entwurf für ein Logo der Vereinigung „Innovative Mathematik“ bilden die getönten Flächen die stilisierten Buchstaben I und M (siehe Abbildung). Das Dreieck ΔABC ist gleichseitig mit der Seitenlänge $a = 6$ cm, $\overline{AC}$ wird von R halbiert und $\overline{BC}$ von S und T in drei gleich große Teile geteilt. Welchen Anteil der Dreiecksfläche überdecken die stilisierten Buchstaben zusammen?



Lösungshinweise: Zusätzlich zu den gegebenen Punkten der Aufgabenstellung bezeichnen wir die Schnittpunkte der Geraden AS und AT mit der Geraden BR mit M bzw. N. Die Höhe in einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a beträgt $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{3}$. Die gesuchte Fläche A ergibt sich aus der Flächenzerlegung:

$$A = A_{BCR} - (A_{AST} - A_{AMN}) + A_{AMN}$$
$$A = A_{BCF} - A_{AST} + 2 \cdot A_{AMN}$$

Laut Konstruktion sind A_{BCF} die Hälfte von A_{ABC} und A_{AST} ein Drittel von A_{ABC}. Außerdem gilt $A_{AMN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a \cdot |MN|$, weil $\overline{AR}$ die Höhe im Dreieck ΔAMN ist. Wenn wir die Länge der Strecke $\overline{MN}$ in Abhängigkeit von a ermitteln können, lässt sich der gesuchte Flächeninhalt berechnen.

Fügen wir die Mittelparallele zu BC durch R (mit dem Schnittpunkt U auf AB) ein, so wird die Strecke $\overline{RU}$ durch die Schnittpunkte von RP mit AT und AS (P bzw. Q)

gedrittelt, d.h. es gilt $|\overline{RP}| = \frac{1}{6}a$. Aus der Strahlensatzfigur mit Zentrum N und den Parallelen RQ und BC finden wir

$$\frac{|\overline{RN}|}{|\overline{NB}|} = \frac{|\overline{RP}|}{|\overline{BT}|} = \frac{\frac{1}{6}\cdot a}{\frac{2}{3}\cdot a} = \frac{1}{4}$$

Wegen $|\overline{RN}| + |\overline{NB}| = h$ erhalten wir $|\overline{RN}| = \frac{1}{5}\cdot h$. Aus der Strahlensatzfigur mit Zentrum M und den Parallelen RQ und BC finden wir außerdem

$$\frac{|\overline{RM}|}{|\overline{MB}|} = \frac{|\overline{RQ}|}{|\overline{BS}|} = \frac{\frac{2}{6}\cdot a}{\frac{1}{3}\cdot a} = 1$$

also $|\overline{RM}| = \frac{1}{2}\cdot h$

Wegen $|\overline{MN}| = |\overline{RM}| - |\overline{RN}|$ erhalten wir $|\overline{MN}| = \frac{1}{2}\cdot h - \frac{1}{5}\cdot h = \frac{3}{10}\cdot h$. Insgesamt finden wir also:

$$A = A_{BCF} - A_{AST} + 2\cdot A_{AMN} = \frac{1}{4}\cdot ah - \frac{1}{6}\cdot ah + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}\cdot h\cdot\frac{1}{2}a = \frac{14}{30}\cdot\frac{ah}{2}$$

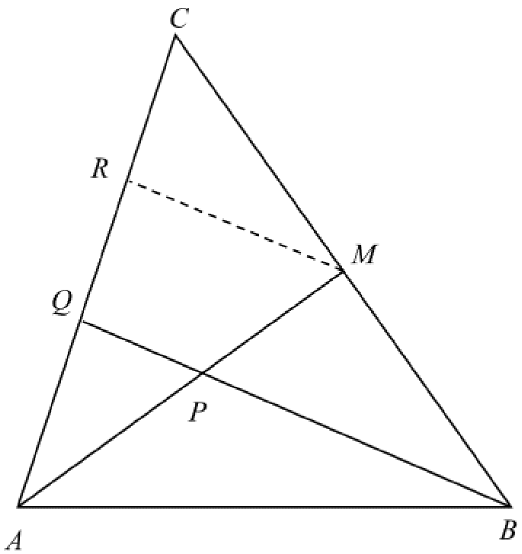
Die gesuchte Fläche beträgt also $\frac{7}{15}$ der Fläche des Dreiecks ΔABC. ❑

Auf dem ersten Blick sehr ähnlich wurde auch in der 57. MO eine Aufgabe mit Flächenberechnung gestellt. Allerdings erwies sich die Ermittlung der Teilflächen als viel einfacher.

Aufgabe 4.08 - MO570935. Gegeben ist ein Dreieck $A\Delta BC$ mit dem Flächeninhalt $AABC = 1$. Es sei M der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ und P der Mittelpunkt von $\overline{AM}$. Weiter schneide die Gerade BP die Seite $\overline{AC}$ in einem Punkt Q.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $MCQP$.

Lösungshinweise: Der Flächeninhalt des Vierecks ist die Differenz aus dem Flächeninhalt des Dreiecks A_{AMC} und dem Dreieck A_{APG}. Da der Flächeninhalt des Dreiecks ΔAMC die Hälfte des Flächeninhaltes des Dreiecks ΔABC ist, genügt es, den Flächeninhalt des Dreiecks ΔAPG zu bestimmen.



Ist R der Mittelpunkt der Strecke $\overline{QC}$, dann ist die Strecke $\overline{MR}$ Mittellinie im Dreieck ΔQBC und folglich $MR \parallel BQ$. Da P auf der Strecke $\overline{BQ}$ liegt und Mittelpunkt der Strecke $\overline{AM}$ ist, ist die Strecke $\overline{PQ}$ Mittellinie im Dreieck AMR, also gilt $|\overline{AQ}| = |\overline{QR}| = |\overline{RC}|$.

Damit beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABQ ein Drittel des Flächeninhaltes des Dreiecks $\Delta ABC,$ da die Längen der Grundseiten $\overline{AQ}$ und $\overline{AC}$ zur selben Höhe im Verhältnis 1 : 3 stehen. Da P der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AM}$ ist, ist zudem der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABP halb so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABM. Da M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ ist, ist auch der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABM halb so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC. Daraus folgt für den Flächeninhalt des Dreiecks ΔAPQ:

$$A_{APQ} = A_{ABQ} - A_{ABP} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Wir erhalten deshalb für den gesuchten Flächeninhalt des Vierecks $MCQP$:

$$A_{MCQP} = A_{AMC} - A_{APQ} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}. \qquad \square$$

Werden die zu untersuchende Figuren in einem kartesischen Koordinatensystem angeordnet, können Bestimmungsstücke für den Flächeninhalt oft ohne unmittelbare geometrische Lösungsansätze berechnet werden.

Aufgabe 4.09 – MO611023. In einem Koordinatensystem befindet sich ein Quadrat mit den Eckpunkten $A = (0;\ 0), B = (12;\ 0), C = (12;\ 12)$ und $D = (0; 12)$. Eine Gerade durch B schneidet die Strecke $\overline{CD}$ in dem Punkt $E = (7; 12)$. Auf der Strecke $\overline{BE}$ befindet sich ein Punkt P.

a) Weisen Sie nach, dass sich die Gerade BE durch die Gleichung $y = -\frac{12}{5}x + \frac{144}{5}$ beschreiben lässt.
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ΔAPD, wenn das Dreieck ΔDPE den Flächeninhalt 28 besitzt.
c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ΔAPD, wenn das Dreieck ΔDPE gleichschenklig ist.

Lösungshinweise zu Teil a) Da eine Gerade durch zwei ihrer Punkte eindeutig bestimmt ist, genügt der Nachweis, dass die Koordinaten von $B = (12, 0)$ und $E = (7, 12)$ die vorgegebene Geradengleichung erfüllen. Tatsächlich gilt

sowohl $0 = -\frac{12}{5} \cdot 12 + \frac{144}{5}$ als auch $12 = -\frac{12}{5} \cdot 7 + \frac{144}{5}$.

Lösungshinweise zu Teil b) Betrachten wir im Dreieck ΔDPE die Strecke $\overline{DE}$ als Grundseite mit der Länge 7, muss mit dem vorgegebenen Flächeninhalt der Punkt P den Abstand 8 von der Geraden DE haben und somit die y-Koordinate $12 - 8 = 4$ besitzen. Somit hat das Dreieck ΔABP den Inhalt $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 = 24$ und das Dreieck ΔBCE den von der Lage des Punktes P unabhängigen Inhalt $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30$. Flächensubtraktion liefert das Ergebnis $144 - 28 - 24 - 30 = 62$.

Lösungsvariante: Der Inhalt des Dreiecks ΔAPD lässt sich auch direkt berechnen, wenn wir die Strecke $\overline{AD}$ als Grundseite mit der Länge 12 betrachten und die x-Koordinate von P als Maßzahl für die Höhe verwenden. Durch Einsetzen von $y = 4$ in $y = -\frac{12}{5}x + \frac{144}{5}$ erhalten wir $x = \frac{31}{3}$ und somit $A_{APD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{31}{3} = 62$.

Lösungshinweise zu Teil c) Wegen des stumpfen Winkels bei E kann die Gleichschenkligkeit des Dreiecks ΔDPE nur durch $|\overline{DE}| = |\overline{EP}| = 7$ erreicht werden. Nach dem Satz des PYTHAGORAS im Dreieck ΔBEP mit der Hypotenuse $\overline{BE}$ hat die Strecke $\overline{BE}$ die Länge $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ und die Strecke $\overline{BP}$ die Länge $13 - 7 = 6$. Die y-Koordinate von P ergibt sich durch senkrechte Parallelprojektion von BE auf BC und ist deshalb nach Strahlensatz $\frac{6}{13}$ von 12, also $\frac{72}{13}$. Für die x-Koordinate von P gilt dann $\frac{72}{13} = -\frac{12}{5} \cdot x + \frac{144}{5}$, also $x = \frac{126}{13}$. Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔAPD beträgt nun $A_{APD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{126}{13} = \frac{756}{13}$. ❑

Aufgabe 4.10 – MO591011. Es sei m eine von null verschiedener und ansonsten beliebiger rationaler Zahl. In einem kartesischen Koordinatensystem (eine Koordinateneinheit soll gleich 1 cm sein) beschreibt dann die Gleichung $y = m \cdot (x - 5) + 2$ die Menge aller Punkte, die auf einer bestimmten Geraden g in der $x - y$ −Ebene liegen. Die Gerade g schneidet die x-Achse in einem Punkt A und die y-Achse in einem Punkt B. Gegeben ist weiterhin ein Punkt P mit den Koordinaten $P = (5, 2)$.

a) Weisen Sie nach, dass alle auf diese Art beschriebenen Geraden (unabhängig vom konkret gewählten Wert für m den Punkt P enthalten.
b) Es gelte $m = -0{,}8$. Die Punkte A und B bilden zusammen mit dem Koordinatenursprung O ein Dreieck. Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ΔOAB.
c) Nun gelte $m = -0.3$. Eine Gerade durch O und P zerlegt das entstehende Dreieck ΔOAB in die Teildreiecke ΔOPB und ΔOAP. Berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte $A_{OPB} : A_{OAP}$ in Form eines Verhältnisses teilerfremder ganzer Zahlen.
d) Für welche Werte von m existiert das Verhältnis der Flächeninhalte $A_{OPB} : A_{OAP}$ und ist für diese Werte ebenfalls eine rationale Zahl? (Hier werden also wieder alle vorgegebenen Werte für m betrachtet.)

Hinweis: Liegen drei durch gewisse Eigenschaften festgelegte Punkte auf einer Geraden oder fallen zwei von ihnen zusammen (so dass es eigentlich nur zwei Punkte gibt oder gar nur einen), dann sagt man mitunter, dass die drei Punkte ein „entartetes“ Dreieck bilden. Solche entarteten Dreiecke werden hier nicht betrachtet.

Lösungshinweise zu Teil a) Das Einsetzen der Zahl 5 für x in $y = m(x-5)+2$ liefert unabhängig vom konkreten Wert für m stets $y = m(5-5)+2 = 2$. Damit liegt P mit den Koordinaten $P = (5;2)$ stets auf g.
Lösungshinweise zu Teil b) Für $m = -0.8$ gilt $y = -0.8 \cdot (x-5)+2 = -0.8 + 6$. Somit hat B als Schnittpunkt von g mit der y-Achse die Koordinaten $B = (0;6)$. Die Strecke $\overline{OB}$ hat damit die Länge 6 cm. Für den Punkt A als Schnittpunkt von g mit der x-Achse muss $0 = -0.8 \cdot x + 6$ gelten, was uns auf $x = 7.5$ führt. Die Strecke $\overline{OA}$ hat damit eine Länge von 7.5 cm. Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ΔOAB beträgt deshalb $A_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7.5 = 22.5$ cm².

Lösungshinweise zu Teil c) Für $m = -0.3$ gilt $y = -0.3 \cdot (x-5)+2 = -0.3x + 3.5$. Wir erhalten damit für den Punkt B die Koordinaten B= $(0;3.5)$ und die Länge $\overline{OB} = 3.5$ cm. Den Wert $y = 0$ erhalten wir für $x = \frac{-3.5}{-0.3} = \frac{35}{3}$. Damit sind für den Punkt A die Koordinaten $A = \left(\frac{35}{3};0\right)$ und die Länge beträgt $|\overline{OA}| = \frac{35}{3}$ cm. Die Höhen über den Grundseiten dieser beiden Dreiecke entsprechen den jeweiligen Koordinaten des Punktes P. Wir finden also $A_{OPB} = \frac{1}{2} \cdot 3.5 \cdot 5 = \frac{35}{4}$ cm² bzw. $A_{OAP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{35}{3} \cdot 2 = \frac{35}{3}$ cm².

Für das gesuchte Verhältnis $A_{OPB} : A_{OPA}$ folgt daraus $\frac{35}{4} : \frac{35}{3} = 3 : 4$.

Lösungshinweise zu Teil d) Neben dem im Aufgabentext bereits ausgeschlossenen Wert $m = 0$ müssen wir auch $m = -0.4$ ausschließen, weil in diesem Fall die Geradengleichung $y = -0.4 \cdot (x-5)+2$ auf $y = -0.4 \cdot x$ reduziert wird. Damit wird für $x = 0$ auch $y = 0$ und umgekehrt für $y = 0$ auch $x = 0$. Die Punkte A und B fallen somit mit dem Koordinatenursprung O zusammen und die Dreiecke ΔOPB und ΔOAP existieren nicht.

Für $m \neq -0.4$ gilt $y = m \cdot (x-5) + 2 = m \cdot x + 2 - 5 \cdot m$. Wir erhalten damit für den Punkt B die Koordinaten $B = (0; 2 - 5 \cdot m)$ und für die Länge $\overline{OB} = |5 \cdot m - 2|$ cm. Den Wert $y = 0$ erhalten wir für $x = \frac{2-5\cdot m}{m}$. Somit hat der Punkt A die Koordinaten $A = \left(\frac{2-5\cdot m}{m};0\right)$, und für die Länge gilt $|\overline{OA}| = \left|\frac{5\cdot m-2}{m}\right|$ cm. Die Höhen über den Grundseiten dieser beiden Dreiecke entsprechen den jeweiligen Koordinaten des Punktes P. Wir finden also

$$A_{OPB} = \frac{1}{2} \cdot |5 \cdot m - 2| \cdot 5 \text{ cm}^2 \text{ bzw. } A_{OAP} = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{5\cdot m-2}{m}\right| \cdot 2 = \left|\frac{5\cdot m-2}{m}\right| \text{ cm}^2.$$

Für das Verhältnis $A_{OPB} : A_{OPA}$ folgt daraus $\frac{5}{2} \cdot |5m-2| : \left|\frac{5m-2}{m}\right| = \frac{5}{2}|m|$. Für jedes $m \neq 0$ und $m \neq 0.4$ existiert das Verhältnis und ist für alle rationale Zahlen m ebenfalls rational. ❑

Bei Kenntnis der Koordinaten der Eckpunkte der zu untersuchende Fläche ist die GAUßsche Flächenformel[5] ein geeignetes Hilfsmittel:

Satz. Sind die Eckpunkte eines ebenen n-Ecks in einem Koordinatensystem durch die Punkte $P_i = (x_i; y_i)$ mit $i = 1,2, \dots n$ gegeben, so gilt für den Flächeninhalt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (y_{i+1} - y_{i-1}) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})$$

wobei $y_0 = y_n$ und $y_{n+1} = y_1$ gelte.

Wenden wir diese Formel auf Aufgabe MO591011 an, so finden wir die Flächeninhalte

- in Teilaufgabe b) für das Dreieck ΔOAB mit den Eckpunkten

$$O = (x_1; y_1) = (0\,; 0), A = (x_2; y_2) = (7.5\,; 0), B = (x_3; y_3) = (0\,; 6):$$
$$A = \frac{1}{2} \cdot \big(0 \cdot (0 - 6) + 7.5 \cdot (6 - 0) + 0 \cdot (0 - 0)\big) = \frac{1}{2} \cdot 7.5 \cdot 6 = 22.5$$

- in Teilaufgabe c) für das Dreieck ΔOAP mit den Eckpunkten

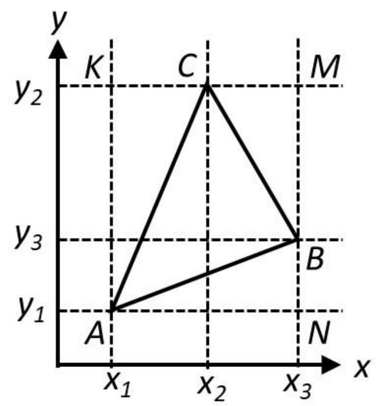
$$O = (x_1; y_1) = (0\,; 0), A = (x_2; y_2) = \left(\frac{35}{3}\,; 0\right), P = (x_3; y_3) = (5\,; 2):$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left(0 \cdot (0 - 2) + \frac{35}{3} \cdot (2 - 0) + 5 \cdot (0 - 0)\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{35}{3} \cdot 2 = \frac{35}{3}$$

und für das Dreieck ΔOPB mit den Eckpunkten

$$O = (x_1; y_1) = (0\,; 0), P = (x_2; y_2) = (5\,; 2), B = (x_3; y_3) = (0\,; 3.5):$$
$$A = \frac{1}{2} \cdot \big(0 \cdot (2 - 3.5) + 5 \cdot (3.5 - 0) + 0 \cdot (0 - 2)\big) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3.5 = \frac{35}{4}$$

Elementargeometrischer Beweis zur GAUßschen Flächenformel: Wir betrachten ein Dreieck ΔABC und zeichnen das kleinste umschreibende Rechteck $AKMN$, dessen Seiten achsenparallel zum Koordinatensystem verlaufen. Dann erhalten wir den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC als Differenz des Flächeninhaltes des Rechtecks $AKMN$ und der Flächeninhalte der rechtwinkligen Dreiecke ΔAKC, ΔCMB und ΔBNA, also

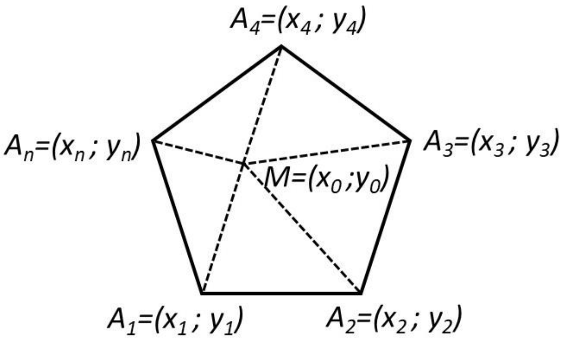


[5] Nach CARL FRIEDRICH GAUß (1777 – 1855), der dies für das Vermessungswesen zunächst mit Trapezzerlegung formuliert hat.

$$2 \cdot A = 2 \cdot \underbrace{(x_3 - x_1) \cdot (y_2 - y_1)}_{A_{AKMN}} -$$
$$\underbrace{(x_3 - x_1) \cdot (y_3 - y_1)}_{A_{AKC}} - \underbrace{(x_3 - x_2) \cdot (y_2 - y_3)}_{A_{CMB}} - \underbrace{(x_2 - x_1) \cdot (y_2 - y_1)}_{A_{BNA}}$$

Nach Ausmultiplizieren der Produkte und Zusammenfassung der Summanden erhalten wir die genannte Formel. Um den Beweis abzuschließen, muss aber noch diskutiert werden, wie die konkrete Lage des Dreiecks zu berücksichtigen ist. ❑

Ist der Flächeninhalt eines konvexen n-Ecks mit den Eckpunkten $A_i = (x_i\,; y_i)$ $(i = 1, 2, \dots\ n)$ zu berechnen, führen wir einen inneren Punkt $M = (x_0\,; y_0)$ ein und zerlegen das n-Eck in n Dreiecke $\Delta M A_i A_{i+1}$. Für jedes dieser Dreiecke können wir die GAUßsche Flächenformel anwenden. Die Summation dieser n Flächeninhalte führt zur allgemeinen Darstellung (wobei für Index $n + 1$ der Index 1 und für Index $1 - 1$ der Index n gesetzt wird):



$$2 \cdot A = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot A_{MA_iA_{i+1}}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \big(x_i \cdot (y_{i+1} - y_0) + x_{i+1} \cdot (y_0 - y_i) + x_0 \cdot (y_i - y_{i+1})\big)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i) + y_0 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i)}_{=0} + x_0 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i+1})}_{=0}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \big(x_i \cdot (y_{i+1} - y_{i-1})\big) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_{i-1} - \sum_{i=1}^{n} x_{i+1} \cdot y_i}_{=0}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \big(x_i \cdot (y_{i+1} - y_{i-1})\big)$$

❑

Aufgabe 4.11 – MO491036. Im Koordinatensystem bezeichnet man Punkte $(x\,; y)$ mit ganzzahligen Koordinaten x und y als Gitterpunkte. Weiter sei für $n \geq 3$ ein n-Eck gegeben, dessen sämtliche Eckpunkte Gitterpunkte sind. Es bezeichne r die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand des n-Ecks (die Eckpunkte eingeschlossen), i die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren des n-Ecks und F seinen Flächeninhalt.

Die Formel von PICK[6] besagt nun $F = \frac{r}{2} + i - 1$.

a) Es seien x, y positive ganze Zahlen. Beweisen Sie die Formel von PICK für das Rechteck mit den Eckpunkten $(0;\ 0), (x;\ 0), (0;\ y)$ und $(x;\ y)$.
b) Beweisen Sie die Formel von PICK für rechtwinklige Dreiecke, deren Katheten parallel zu den Koordinatenachsen liegen.
c) Beweisen Sie die Formel von PICK für beliebige Dreiecke.

Lösungshinweise zu Teil a) Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt $F = x \cdot y$. Auf dem Rand liegen $r = 2 \cdot x + 2 \cdot y$ Gitterpunkte, im Inneren liegen $(x-1) \cdot (y-1)$ Punkte. Also finden wir

$$\frac{r}{2} + i - 1 = x + y + (x-1) \cdot (y-1) - 1$$
$$= x + y + xy - x - y + 1 - 1 = xy = F\ .$$

Lösungshinweise zu Teil b) Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen x und y. Der Flächeninhalt beträgt $F = \frac{1}{2}xy$. O.B.d.A. platzieren wir das Koordinatensystem so, dass die Katheten auf den Koordinatenachsen liegen und der Eckpunkt mit dem rechten Winkel mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt.

Wir zählen nun die Gitterpunkt im Dreieck und auf dessen Rand aus. Auf den Katheten liegen x Gitterpunkte auf der x-Achse, y Gitterpunkte auf der y-Achse und ein Gitterpunkt im Koordinatenursprung. Wir nehmen an, auf dem Inneren der Diagonalen des Rechtecks, dass dem Dreieck umschrieben ist und dessen zwei Seiten mit den Katheten übereinstimmen, seien a Gitterpunkte. Dann liegen auf dem Rand des Dreiecks $r = x + y + a$ Gitterpunkte und im Innern des Dreiecks $i = \frac{(x-1)(y-1)-a}{2}$ Gitterpunkte. Insgesamt finden wir

$$\frac{r}{2} + i - 1 = \frac{x+y+1+a}{2} + \frac{(x-1)(y-1)-a}{2} - 1$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (x + y + a + 1 + xy - x - y + 1 - a) - 1 = \frac{1}{2}xy = F.$$

Lösungshinweise zu Teil c) (skizziert). In Analogie zum Nachweis, dass die Formel von PICK bei Zerlegen eines Rechtecks in zwei Dreiecke korrekt angewandt werden kann, können wir zeigen, dass auch das Zusammenfügen zweier Dreiecke entlang einer gemeinsamen Seite zu einem Dreieck oder Rechteck mit der Formel von PICK korrekt berechnet werden kann. Dies folgt aus der Eigenschaft, dass Randpunkte nur „halb" gezählt werden und damit beim Aneinanderfügen entlang einer Seite die scheinbar doppelte Zählung der neuen inneren Punkte aufgehoben wird. Konstruieren wir nun um das beliebige Dreieck ein achsenparalleles Rechteck, so ergibt sich der Flächeninhalt (ähnlich wie bei der GAUßschen Flächenformel) aus Summen und

[6] Erstmalig beschrieben vom österreichischen Mathematiker GEORG ALEXANDER PICK (1859 – 1942)

Differenzen von Flächeninhalten von Rechtecken und Dreiecken. Allerdings sind die möglichen Lagen der Eckpunkte im umschriebenen Rechteck gewissenhaft zu berücksichtigen.

Mathematik im Wettbewerb „Jugend forscht“

Der Bundeswettbewerb „Jugend forscht“ wird von der gleichnamigen Stiftung ausgerichtet [7]. Im Jahre 1965 rief der damalige Chefredakteur und Herausgeber des STERN, Henri Nannen, den Wettbewerb „Jugend forscht“ ins Leben, um der naturwissenschaftlich-technischen Nachwuchsforschung ein Podium für ihre Aktivitäten zu bieten. Ab 1975 ist „Jugend forscht“ ein gemeinsames Förderungswerk des Bundesministeriums für Bildung und Wissenschaft sowie des STERN. Die Schirmherrschaft hat der Bundespräsident übernommen.
Die Wettbewerbsidee ist dem ursprünglichen Anliegen treu geblieben. Alles, was in den sieben Fachgebieten[8] (FG) Arbeitswelt, Biologie, Chemie, Geo- und Raumwissenschaft, Mathematik/Informatik, Physik und Technik untersuchenswert erscheint, kann aufgegriffen, erarbeitet und schließlich in den Regionalwettbewerben präsentiert werden. Sowohl als Einzelstarter als auch in einer Gruppe bis zu drei Teilnehmenden können Mädchen und Jungen bis 14 Jahre („Jugend forscht junior“[9]) bzw. Jugendliche zwischen 15 und 21 Jahre („Jugend forscht“) starten. Die Anmeldung bis zum 30. November ist gleichermaßen die Startberechtigung – vorausgesetzt, bis zum Einsendetermin im Januar des Folgejahres wird eine maximal 15-seitige Darstellung des Projektes vorgelegt. Diese Arbeit ist zum Wettbewerb öffentlich vorzustellen: an einem Stand steht man Juroren, Gästen und den anderen Teilnehmenden Rede und Antwort.

Der Gesamteindruck aus schriftlicher Arbeit, Standpräsentation und mündlicher Darstellung entscheidet über die Preisvergabe. Wesentliche Erfolgskriterien sind: Originalität, Eigenständigkeit, Kreativität. Kaum einer geht leer aus, viele Sonderpreise sind Lohn für die Leistungen. Die Besten jedes Fachgebietes (und das können auch jeweils mehrere sein) werden zur Teilnahme am Landesausscheid eingeladen, wo sie die Chancen erhalten, als Landesbeste ins Bundesfinale zu gelangen.

Schuljahr	Teilnehmerzahl (Anmeldungen zur 1. Runde)	Patenfirma des Bundesfinales
2021/22	8.527	*FORSCHUNGSFORUM Schleswig-Holstein e.V. Lübeck*

[7] www.jugend-forscht.de
[8] schwer klassifizierbare Themen können als interdisziplinäre Arbeiten gesondert bewertet werden.
[9] bislang als „Schüler experimentieren“ bekannt

2022/23	9.386	*Unternehmensverbände im Lande Bremen e. V. Bremen*
2023/24	10.492	*experimenta gGmbH, Heilbronn*

Gesamt-Teilnehmerzahl und Patenfirma des Bundesfinales

Das **FG Mathematik/Informatik** eignet sich eigentlich gut für eine Präsentation eigener Untersuchungen, zeigt aber auch im Jahr 2024 bundesweit mit 866 Teilnehmenden (8.3%) wieder beinahe die geringste Resonanz, knapp vor dem FG Geo- und Raumwissenschaft (600 Teilnehmende, 5.7%) und deutlich weniger als zum Beispiel im FG Biologie (2.516 Teilnehmende, 24.0%) oder im FG Technik (2.016 Teilnehmende, 19.2%).

Der Landeswettbewerb Sachsen fand am 23. März 2024 bei DAS Environmental Expert GmbH statt. Zwei weitere Patenunternehmen unterstützten die Veranstaltung: GLOBALFOUNDRIES Dresden und BGH Edelstahlwerke GmbH. Es waren 22 Jugendliche mit 21 Projekten am Start. Dazu hatten sich noch 13 Schülerinnen und Schüler mit sechs Projekten in der Sparte „Jugend forscht junior“ qualifiziert. Das FG Mathematik/Informatik war mit vier Projekten „Jugend forscht“ (19.0%) und zwei Projekten der Jüngeren (33.3%) überdurchschnittlich vertreten.

Jeder, der sich schon einmal mit einer mathematischen Problemstellung vertieft befasst hat, sollte seine Ergebnisse auch bei „Jugend forscht“ vorstellen. Die Mühe der Präsentationsvorbereitung lohnt sich auf alle Fälle! Bei Anfrage wird gern Unterstützung bei der Themenfindung, der inhaltlichen Umsetzung und oder der außerschulischen Betreuersuche gegeben – aber jede Lehrerin und jeder Lehrer fürs Fach Mathematik ist gleichermaßen ein Ansprechpartner.

Die folgende Übersicht der Themen der sächsischen Landeswettbewerbe aus vergangenen Jahren gibt einen Eindruck über die Vielfalt der untersuchten Fragestellungen im Fachgebiet Mathematik/Informatik – auch wenn manche Projekttitel nur wenig über den Inhalt[10] verraten:

Benedix, Alexander (Student): **Integration über sphärische Dreiecke** *2. Platz, Sonderpreis c’t Magazin, Sonderpreis Studienseminar im Kerschensteiner Kolleg des Deutschen Museums in München*	2023
Benedix, Alexander (Student) **Simulation supraleitender Lager**	2024
Beyer, Henning (Arwed-Rossbach-Schule – BSZ Leipzig): **Einsatz effektiverer Transformer-Encoder** *2. Platz, Sonderpreis Elektronik, Energie- oder Informationstechnik*	2023

[10] ausführliche Beschreibungen zu den Projekten 2024 unter https://www.jugend-forscht-sachsen.de/jugend-forscht/teilnehmer/

Beyer, Henning (Arwed-Rossbach-Schule – BSZ Leipzig): **Geschwindigkeits-optimierung des IMoJIE-Modells** *2. Platz, Sonderpreis c't Magazin, Sonderpreis Rundfunk-, Fernseh- und Informationstechnik*	2022
Droste, Alexander (Universität Leipzig, vormals Ostwald-Gymn. Leipzig): **Penrose-Parkettierung** *Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale 2022 (2. Preis)*	2022
Goncharov, Denis (Kepler-Gymn. Chemnitz) **Modellierung der Durchschnittsgeschwindigkeit eines Radfahrers** *2. Platz, Sonderpreis Rundfunk-, Fernseh- und Informationstechnik*	2024
Hertel, Christian (Nexö-Gymn. Dresden): **Echtzeit-Synchronisierung von Audio-Streams** *Sonderpreis „Jugend unternimmt" – Summer School, Sonderpreis futureSAX*	2022
Jaretzki, Lennart (Student) **Geometrischer deep-Learning Ansatz zur Knotentheorie** *2. Platz*	2024
Lowa, Alexander/ Voigtmann, Richard (TU Dresden): **Falschinformationen erkennen mithilfe von KI** *Landessieger, Teilnahme am Bundesfinale, Sonderpreis Staatsministerium für Wirtschaft, Arbeit und Verkehr, futureSAX Sonderpreis*	2023
Neubauer, Hannah (Mosen-Gymn. Oelsnitz/Vogtl.): **Simulation des Covid-19-Pandemieverlaufes** *3. Platz, Sonderpreis Thinkig Safety*	2022
Riedel, Max (Nexö-Gymn. Dresden) **Analyse und Visualisierung von SingleCell-Sequenzierungen** *3. Platz, Sonderpreis Elektronik, Energie- oder Informationstechnik, Sonderpreis futureSAX*	2024

Im Schuljahr 2023/24 wurde im FG Mathematik/Informatik kein Landessieger gekürt. Damit konnte sich aus Sachsen in diesem Fachgebiet leider kein Teilnehmer fürs Bundesfinale qualifizieren.

Das Bundesfinale des 59. Bundeswettbewerbs richtete die Stiftung Jugend forscht e.V. gemeinsam mit der experimenta gGmbH[11] in Heilbronn vom 30. Mai bis 2. Juni 2024 aus. Insgesamt 175 Finalisten hatten sich mit ihren 107 Projekten während des Finales einer Expertenjury aus Wissenschaft und Forschung gestellt, darunter 21 Teilnehmende mit 14 Projekten im FG Mathematik/Informatik. Hier errangen Alexander Reimer und Matteo Friedrich vom Gymnasium Eversten Oldenburg mit ihrem Projekt „Training für lernfähige Materialien – Analyse der Optimierungsverfahren mechanischer neuronaler Netzwerke" den 1. Preis. Der

[11] https://www.experimenta.science/

Finalsieg war mit einem Preisgeld der Fraunhofer-Gesellschaft zur Förderung der angewandten Forschung e.V. (2500 €) und dem Sonderpreis der Bundespateninstitution „Einladung zu einem Praktikum im Science Dome der experimenta“ verbunden. Über die Siegerarbeit ist unter www.jugend-forscht.de in der Preisträgerbroschüre[12] lesen:

> *Hinter mancher KI steckt ein neuronales Netzwerk – eine Software, die der Funktionsweise des menschlichen Gehirns nachempfunden ist. Seit Kurzem experimentiert die Fachwelt jedoch auch mit lernfähigen Netzen, die mechanisch arbeiten, indem etwa viele kleine Massen durch Federn verbunden werden. Faszinierenderweise ist es möglich, diesem Netzwerk durch Anpassen der Federn verschiedene Verhaltensweisen anzutrainieren. Alexander Reimer und Matteo Friedrich wollten herausfinden, wie so ein Training aussehen kann. Dazu simulierten sie ein mechanisches neuronales Netzwerk im Computer, spielten verschiedene Szenarien durch und untersuchten die Details vielversprechender Trainingsansätze. Sie fanden heraus, dass lernfähige Materialien denkbar sind, die sich ihrer Umwelt ganz von selbst anpassen.*

Die Jury überzeugte die Begeisterung und Beharrlichkeit von ALEXANDER REIMER und MATTEO FRIEDRICH, sich in ein hochkomplexes Thema der Informatik einzuarbeiten. Dabei haben sie die theoretischen Grundlagen mechanischer neuronaler Netze tief durchdrungen und daraus Lösungen für hochrelevante Anwendungen entwickelt. Ihre Arbeit ist äußerst innovativ, brillant umgesetzt und eindrucksvoll visualisiert (Auszug aus der Laudatio).

In alten Mathe-Büchern geblättert

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra mit Übungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten

Professor Dr. Th. Spieker

Verlag von August Stein, Potsdam 1895[13].
Zweiter Cursus

Abschnitt XVIII
Das Binomialtheorem für ganze positive Exponenten

§ 276.

Der binomische Lehrsatz

[12] https://www.jugend-forscht.de/wettbewerbe/bundeswettbewerb-2023/preistraegerinnen-und-preistraeger.html

[13] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet. Im Original sind Variablen und Gleichungen bereits in „gerader“ Schrift gedruckt.

Die nte Potenz des Binoms (x + a), wenn n eine ganze positive Zahl ist, wird in entwickelter Form durch folgende nach Potenzen von x geordnete Reihe dargestellt:

$$(x+a)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}a^2 + \cdots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot r}x^{n-r}a^r + \cdots + a^n.$$

Beweis: Setzt man in der Entwicklung des Produkts n binomische Faktoren des vor. §, also in

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\dots(x+a_n) = x^n + C^1(a_n)x^{n-1}$$
$$+C^2(a_n)x^{n-2} + \cdots + C^r(a_n)x^{n-r} + \cdots + C^n(a_n),$$
$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n,$$

so wird aus dem Produkte links $(x+a)^n$, rechts aber ist:

$$C^1(a_n) = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = C(n)\cdot a = \frac{n}{1}a;$$
$$C^2(a_n) = a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + \cdots = C^2(n)\cdot a^2 = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2;$$
$$C^3(a_n) = a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_2a_5 + \cdots = C^3(n)\cdot a^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3;$$
$$\vdots$$
$$C^r(a_n) = C^r(n)\cdot a^r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot r}a^r;$$
$$\vdots$$
$$C^n(a_n) = C^n(n)\cdot a^n = 1\cdot a^n.$$

Folglich ist:

$$(x+a)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}a^2 + \cdots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot r}x^{n-r}a^r + \cdots + a^n.$$

Über diese Binomialreihe ist folgendes zu bemerken:

1. Für x ist dieselbe fallend und für a steigend geordnet. Die Exponenten von x und a in jedem Gliede ergänzen sich zu n. Die Reihe hat daher stets (n+1) Glieder.
2. Die Coeffizienten der Glieder, d. i. Binomialcoeffizienten, sind die Combinationszahlen der einzelnen Klassen von n Elementen ohne Wiederholung. Betrachtet man das Anfangsglied x^n als das 0te, so ist sein Coeffizient $C^0(n) = 1$, der Coeffizient des rten Gliedes $C^r(n) = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot r}$, der Coeffizient des letzten oder nten $= C^n(n) = 1$. – Für die ersten bestimmten Werte von n liefert das Pascalsche Dreieck § 272 in seinen Horizontalreihen die Binomialcoeffizienten. Z.B.

$$(x+a)^7 = x^7 + 7x^6a + 21x^5a^2 + 35x^4a^3 + 35x^3a^4 + 21x^2a^5 + 7xa^6 + a^7.$$

3. Da nach § 271 $C^r(n) = C^{n-r}(n)$, so sind die Binomialcoefficienten paarweise in gleichen Abstand von den Enden der Reihe einander gleich. Ist n eine gerade Zahl, so steht in der Mitte der Reihe ein Glied mit dem größten Coeffizienten einzeln, ist n ungerade, so steht in der Mitte ein Paar von Gliedern mit gleichen Coeffizienten. Bemerkung: Die Binomialcoeffizienten werden auch abgekürzt bezeichnet vom 1ten ab durch:
$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \binom{n}{4}, \dots, \binom{n}{r},$$
und dann gelesen: „n tief 1“, „n tief 2“, „n tief r“, so daß der binomische Lehrsatz geschrieben werden kann:
$$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}a + \binom{n}{2} x^{n-2}a^2 + \cdots + \binom{n}{r} x^{n-r}a^r + \cdots + \binom{n}{n} a^n.$$
4. Wenn a negativ ist, so sind die Glieder der Binomialreihe abwechselnd positiv und negativ:
$$(x-a)^n = x^n - \binom{n}{1} x^{n-1}a + \binom{n}{2} x^{n-2}a^2 - \binom{n}{3} x^{n-3}a^3 + \cdots.$$
Der binomische Lehrsatz bildet das Schema, vermöge dessen man jedes Binom mit einem ganzen positiven Exponenten potenzieren, und jedes beliebige Glied, dessen Index gegeben ist, finden kann, ohne die ganze Entwicklung zu machen.

Bekannte mathematische Sätze

Der Binomialkoeffizient. Es seinen k und n natürlichen Zahlen mit $k \leq n$. Dann nennt man $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-1)!}$ den Binomialkoeffizient *„n über k“*. Die Ganzzahligkeit des Koeffizienten folgt unmittelbar aus folgendem

Satz. Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen in einer n-elementigen Menge ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$.

Beweis: Es sei M eine n-elementige Menge und $T \subseteq M$ eine k-elementige Teilmenge von M. Wir betrachten die Menge aller bijektiven Abbildungen $\{1,2,\dots,n\} \to M$, die zusätzlich $\{1,2,\dots,k\}$ auf T (und damit) $\{k+1,\dots,n\}$ auf $M \setminus T$ abbilden. Weil es $k!$ bijektive Abbildung der k-elementigen Menge nach T und $(n-k)!$ bijektive Abbildungen der $(n-k)$-elementigen Menge nach $M \setminus T$ gibt, sind es insgesamt $k! \cdot (n-k)!$ solche Abbildungen. Insgesamt gibt es $n!$ bijektive Abbildungen von M nach M. Daher ist Insbesondere $k! \cdot (n-k)!$ ein Teiler von $n!$ und es ist
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$
die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von M.

Bemerkung: Den Namen erhielten diese Zahlen, da sie als Koeffizienten beim Potenzieren eines Binoms auftreten (siehe binomischer Lehrsatz unter „In alten Mathe-Büchern geblättert“). Die englische Übersetzung zu "n $\ddot{u}ber$ k" lautet "n $choose$ k" mit der Taschenrechner-Abkürzung nCr.

Folgerung: **Aufgabe MO631045.** Beweisen Sie: Ist n eine positive ganze Zahl, so ist

$$\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$$

ganzzahlig.

Lösungshinweise: Wir schreiben zunächst die Fakultät im Zähler aus.

$$\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}} = \frac{1 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot 2n \cdot \ldots \cdot (n^2 - n + 1) \cdot \ldots \cdot n^2}{n^{n+1} \cdot \big((n-1)!\big)^{n+1}}$$

Wir schreiben den Zähler unter Verwendung von

$$(rn+1) \cdot (rn+2) \cdot \cdots \cdot (rn+n-1) = \frac{\big((r+1)n - 1\big)!}{(rn)!}$$

um und erhalten:

$$\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}} = \frac{\left((n-1)! \cdot n \cdot \frac{(2n-1)!}{(n)!} \cdot 2n \cdot \frac{(3n-1)!}{(2n)!} \cdot 3n \cdot \ldots \cdot \frac{(n^2-1)!}{((n-1)n)!} \cdot n^2\right)}{n^{n+1} \cdot \big((n-1)!\big)^{n+1}}$$

Wir können nun $n \cdot 2n \cdot 3n \cdot \cdots \cdot (n-1)n \cdot n^2$ als $n^{n+1} \cdot (n-1)!$ zusammenfassen und kürzen damit mit den entsprechenden Faktoren im Nenner. Danach lassen sich die Terme im Zähler und im Nenner so umordnen, dass Binomialkoeffizienten erkennbar werden:

$$\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}} = \frac{(n-1)! \cdot (2n-1)! \cdot (3n-1)! \cdot \ldots \cdot \big((n-1)n\big)! \cdot (n^2-1)!}{\big((n-1)!\big)^n \cdot n! \cdot (2n)! \cdot (3n)! \cdot \cdots \cdot \big((n-1)n\big)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,(n)!} \cdot \frac{(3n-1)!}{(n-1)!\,(2n)!} \ldots \cdot \frac{\big((n-1)n)\big)!}{(n-1)!\,((n-2)n)!} \cdot \frac{(n \cdot n - 1)!}{((n-1)n)!}$$

$$= \binom{n-1}{n-1} \cdot \binom{2n-1}{n-1} \cdot \binom{3n-1}{n-1} \cdot \ldots \cdot \binom{(n-1)n-1}{n-1} \cdot \binom{n \cdot n - 1}{n-1}$$

Als Produkt von (ganzzahligen) Binomialkoeffizienten ist der zu untersuchende Ausdruck auch ganzzahlig. ❑

Termine

Online-Veranstaltung „Jugend forscht für Einsteigende“ vermittelt das wichtigste Rüstzeug, das beim Start in den Wettbewerb hilft, und gibt Gelegenheit, sich mit Vertreterinnen und Vertretern aus dem Jugend-forscht-Netzwerk auszutauschen.
11. September 2024, 17:00 bis 18:00 Uhr, Veranstalter: Stiftung Jugend forscht e.V. Hamburg. Anmeldung bis 11.09.2024 16:00 Uhr unter:
https://www.jugend-forscht.de/netzwerk/informationen-fuer-projektbetreuende/qualifizierungsangebote-und-veranstaltungen/detail/jugend-forscht-fuer-einsteigende-september-2024.html

Spotlight Mathe – Einblicke in en Bundeswettbewerb Mathematik (online-Seminar), 18. September .2024, 17:30 bis 18:30 Uhr, Veranstalter: Bildung & Begabung gGmbH Bonn. Anmeldung:
https://secure.bildung-und-begabung.de/workshops/?event=10160

Spotlight Mathe – Einblicke in die Mathematik-Olympiade für Grundschulen (online-Seminar), 19. September 2024, 16:00 bis 17:00 Uhr, Veranstalter: Bildung & Begabung gGmbH Bonn. Anmeldung:
https://secure.bildung-und-begabung.de/workshops/?event=10161

Spotlight Mathe – Einblicke in die Mathematik-Olympiade (online-Seminar), 19. September 2024, 17:30 bis 18:30 Uhr, Veranstalter: Bildung & Begabung gGmbH Bonn. Anmeldung:
https://secure.bildung-und-begabung.de/workshops/?event=10162

Wissenschaft LIVE! Die Online-Veranstaltungsreihe der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e. V. und der Stiftung Jugend forscht e. V., 19. September 2024 von 15:30 bis 16:45 Uhr zum Thema „Laser und Attosekundenphysik“ mit Alexander Weigel, Max-Planck-Institut für Quantenoptik (Garching bei München). Informationen und Anmeldung bis 19.09.2024 unter
https://www.jugend-forscht.de/netzwerk/informationen-fuer-projektbetreuende/qualifizierungsangebote-und-veranstaltungen/detail/wissenschaft-live-forschung-aus-erster-hand-fuer-projektbetreuung-laser-und-attosekundenphysik.html

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 6/2024

Aufgabe T–3 (Teamwettbewerb der 10. MeMO, 2016, Vöcklabruck/Österreich). Ein Landstück hat die Form eines 8×8-Quadrates, dessen Seiten in Nord-Süd- beziehungsweise Ost-West-Richtung verlaufen, und besteht aus 64 kleineren quadratischen 1×1-Grundstücken. Auf jedem solchen Grundstück kann höchstens ein Haus stehen. Ein Haus steht auf höchstens einem 1×1-Grundstück. Wir sagen, ein Haus *steht im Schatten*, wenn drei Häuser auf den im Osten, Westen und Süden direkt angrenzenden Grundstücken stehen.

Was ist die größtmögliche Anzahl an Häusern auf dem Landstück, sodass keines davon im Schatten steht?

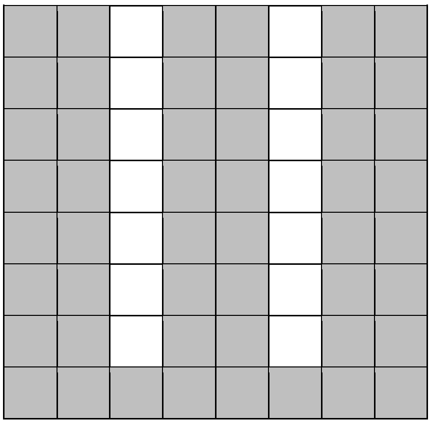
Bemerkung: Gemäß Definition stehen Häuser an der Ost-, West- und Südgrenze des Landstücks niemals im Schatten.

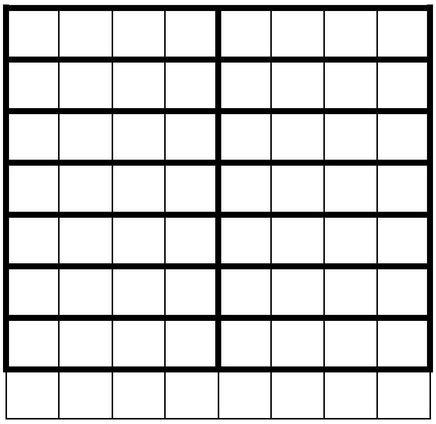
Lösungshinweise: Die maximale Anzahl von Häusern mit der geforderten Eigenschaft ist 50. Für den Nachweis stellen wir uns das Landstück wie ein Schachbrett vor. Wir färben ein Feld mit einem Haus schwarz und ohne Haus weiß. Wie üblich bezeichnen wir mit $(i; j)$ das Feld in der i-ten Zeile und j-ten Spalte (wobei die erste Zeile die nördlichste und die erste Spalte die westlichste ist).

Wir stellen fest, dass eine optimale Konfiguration erreicht werden kann, indem wir alle Felder entlang der Ost-, Süd- und Westgrenze einfärben. Nehmen wir nämlich an, dass es eine optimale Konfiguration gibt, bei der eines dieser Felder, zum Beispiel $(i\,; 1)$, weiß bleibt. Da wir eine optimale Konfiguration haben, kann dieses Feld nicht schwarz gefärbt werden. Das bedeutet, dass wir durch das Einfärben von $(i\,; 1)$, das Feld $(i\,; 2)$ blockieren würden. Mit anderen Worten, wir wissen, dass die Felder $(i\,; 2)$, $(i\,; 3)$ und $(i + 1\,; 2)$ in dieser optimalen Konfiguration alle schwarz gefärbt sind.

Wir sehen jedoch, dass wir $(i\,; 1)$ anstelle von $(i\,; 2)$ einfärben können, indem wir die gleiche Anzahl schwarzer Felder beibehalten und $(i\,; 1)$ einfärben, ohne die anderen Felder zu verändern. Wir können dieselbe Überlegung auf jede der Felder $(1\,; 1)$ … $(8\,; 1), (8\,; 1)$ … $(8\,; 8)$ und in ähnlicher Weise auf $(8\,; 8)$ … $(1\,; 8)$ anwenden und damit zeigen, dass es eine optimale Konfiguration gibt, bei der alle Felder entlang der Grenzen Ost, Süd und West schwarz gefärbt sind. Da diese Zellen eingefärbt sind, verbleibt ein 7×6-Bereich des Spielbretts.

Wir können nun zeigen, dass nicht mehr als 28 Felder in diesem Bereich schwarz gefärbt sein können. Um 28 zu erhalten, muss die durchschnittliche Anzahl der schwarzen Felder pro Reihe 4 betragen. Wenn jedoch eine Reihe sechs schwarze Felder enthält, kann die nächste Reihe keine schwarzen Felder enthalten, da ein solches schwarzes Feld das Feld unmittelbar nördlich von ihr blockieren würde. Wenn eine Reihe 5 schwarze Felder enthält, kann die nächsttiefere Reihe höchstens 3 schwarze Felder enthalten (und zwar in dem Feld unmittelbar unter dem einzelnen weißen Feld und den beiden benachbarten Feldern). Dies zeigt, dass die durchschnittliche Anzahl schwarzer Felder pro Reihe in unserem 7×6-Bereich nicht größer als 4 sein kann. Daraus ergibt sich eine Obergrenze für die Gesamtzahl der schwarzen Felder: die 22 Randfelder plus 28 Felder in der verbleibenden 7×6-Fläche, d. h. insgesamt 50 Felder. Ein Beispiel, das zeigt, dass 50 tatsächlich erreicht werden können, ist das folgende. Wir färben die Spalten 1, 2, 4, 5, 7, 8 und die Reihe 8 schwarz und lassen die übrigen Felder weiß. Diese Färbung erfüllt eindeutig die Bedingungen und enthält genau 50 schwarze Felder, womit der Beweis erbracht ist.





Wenn wir auf jedem dunkelgrauen Feld in der linken Abbildung ein Haus bauen, sehen wir, dass 50 Häuser entsprechend gebaut werden können.

Lösungsvariante: Haben wir die Lösung gemäß der linken Abbildung erraten, können wir beweisen, dass nicht mehr als 50 Häuser gebaut werden können, oder, äquivalent dazu, dass mindestens 14 Grundstücke leer bleiben. Betrachten wir die 14 4×1-Rechtecke in der rechten Abbildung, die durch ihre dicke Umrandung gekennzeichnet sind.

Wir ordnen jedem dieser 14 Rechtecke eindeutig ein leeres Grundstück zu, und zwar wie folgt

- wenn das Rechteck mindestens eine leere Fläche enthält, ordnen wir ihm die östlichste dieser Flächen zu;
- wenn das Rechteck keine leeren Parzellen enthält, ordnen wir ihm die westlichste leere Parzelle des unmittelbar südlich davon gelegenen Rechtecks zu.

Um zu sehen, dass diese Zuordnung machbar ist, ist zu beachten, dass, wenn ein Rechteck keine leeren Grundstücke enthält, seine beiden zentralen Häuser von der Sonneneinstrahlung von Osten und Westen her blockiert sind. Daher müssen die beiden zentralen Grundstücke des Rechtecks direkt südlich davon leer sein, was zeigt, dass wir das westlichste leere Grundstück tatsächlich dem ursprünglichen Rechteck zuordnen können, während das östlichste leere Grundstück nicht zugeordnet wird. Die obige Zuordnung ist also machbar und zeigt, dass es mindestens 14 leere Parzellen gibt, womit der Beweis abgeschlossen ist. ❑

Monatsaufgabe 09/2024[14].

Bestimme alle ganzen Zahlen $n \geq 3$, für die es möglich ist, n Sehnen eines Kreises so zu zeichnen, dass ihre $2n$ Endpunkte alle paarweise verschieden sind und jede Sehne genau k andere Sehnen schneidet, wobei:

(a) $k = n - 2$,
(b) $k = n - 3$.

Bemerkung: Eine Sehne eines Kreises ist eine Strecke, deren beide Endpunkte auf der Kreislinie liegen.

Inhalt

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2024/25)

Ausgabe[15]	Nr.	Thema	Aufgabe
09/2024 (Sept.)		Binomialkoeffizienten	MO631045
	Thema 04.2	Flächenberechnung	MO630946
08/2024 (Aug.)	Thema 29	Schubfachprinzip	MO631041 MO630941 MO630934

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar
Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[14] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 31.10.2024 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.
[15] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.