Teil A: Herbstfreuden

Aufgabe 1 – Antwortsatz: Kreisa hat 4 Beutel gefüllt, Quadrato 8 Beutel, Frau Dreieck 6 Beutel und Herr Raute 12 Beutel.

Herleitung: So eine Aufgabe kannst du mit systematischem Probieren lösen. Wenn du weißt, wie viele Beutel Kreisa gefüllt hat, kannst du ausrechnen, wie viele Beutel Quadrato, Frau Dreieck und Herr Kreisa füllten. Wenn sich dabei insgesamt 30 Beutel ergeben, ist die Aufgabe gelöst.

Trage in einer Tabelle übersichtlich ein, wie du probierst:

Anzahl der gefüllten Beutel					
Kreisa	Quadrato	Frau Dreieck	Herr Raute	Gesamt	Vergleich
1	1 + 4 = 5	(5 + 1) : 2 = 3	5 + 1 = 6	1 + 5 + 3 + 6 = 15	15 < 30
2	2 + 4 = 6	(6 + 2) : 2 = 4	6 + 2 = 8	2 + 6 + 4 + 8 = 20	20 < 30
3	3 + 4 = 7	(7 + 3) : 2 = 5	7 + 3 = 10	3 + 7 + 5 + 10 = 25	25 < 30
4	**4 + 4 = 8**	**(8 + 4) : 2 = 6**	**8 + 4 = 12**	**4 + 8 + 6 + 12 = 30**	**30 = 30**
5	5 + 4 = 9	(9 + 5) : 2 = 7	9 + 5 = 14	5 + 9 + 7 + 14 = 36	35 > 30

Wenn Kreisa 4 Beutel gefüllt hat, beträgt die Gesamtzahl aller gefüllten Beutel 30. Eine Probe ist in der Tabelle bereits enthalten, denn alle Bedingungen wurden beachtet.

Lösungsvariante: Wenn wir die Anzahl der gefüllten Beutel von Frau Dreieck als 1 Teil betrachten, dann sammelte Herr Raute 2 Teile und Kreisa und Quadrato zusammen (so viel wie Herr Raute) auch 2 Teile. Insgesamt sammelte Familie Geometrie also 5 Teile.
Wegen 30 : 5 = 6 besteht ein Teil aus 6 Beutel. Damit finden wir leicht heraus, wie viele Beutel jeder sammelte. Wir müssen aber noch eine vollständige Probe durchführen und untersuchen, ob alle Bedingungen erfüllt sind.

$$8 = 4 + 4,\ (8 + 4\ ) : 2 = 6,\ 8 + 4 = 12,\ 8 + 4 + 6 + 12 = 30$$

Lösungsvariante: Wir bezeichnen die Anzahl der gefüllten Beutel jeweils mit den Anfangsbuchstaben K (für Kreisa), Q (für Quadrato), D (für Frau Dreieck) und R (für Herrn Raute). Dann können wir die drei Aussagen im Aufgabentext durch Gleichungen aufschreiben:

Q hatte 4 Beutel mehr gefüllt als K:	**Q** = **K** + 4
Q und K füllten zusammen doppelt so viele Beutel wie D:	2 · **D** = Q + K
R füllte so viele Beutel wie Q und K zusammen:	*R* = Q + K
Insgesamt füllten sie 30 Beutel:	K + Q + D + R = 30

Wir setzen für Q die erste Aussage ein:	**Q** = **K** + 4
Aufgrund der zweiten Aussage wissen wir:	Q + K = (K + 4) + K = 2 · K + 4 = 2 · D
Damit gilt:	**D** = (2 · K + 4) : 2 = K + 2.
Wir setzen nun für R die erste Aussage ein:	**R** = Q + K = (K + 4) + K = 2 · K + 4
Wir können also die Anzahl der gefüllten Beutel für alle unter Verwendung von K berechnen.	30 = K + Q + D + R = = K + (K + 4) + (K + 2) +(2 · K + 4) = = 5 · K + 10

Aus der letzten Gleichung ermitteln wir K = 4. Damit finden wir Q = 4 + 4 = 8, D = (4 + 8) : 2 = 6 und R = 4 + 8 = 12. Die Summe der vier Zahlen beträgt wie gefordert 4 + 8 + 6 + 12 = 30.

Aufgabe 2 – Antwortsatz. Quadrato hatte diesmal 20 Kastanien gesammelt.

Herleitung: Auch diese Aufgabe kannst du durch systematisches Probieren lösen. Da Kreisa 10 Kastanien abgeben soll, beginnen wir mit mehr als 10 Kastanien:

Anzahl Kastanien		Anzahl Kastanien nach Tausch		Vergleich
Kreisa	Quadrato	Quadrato + 10	Kreisa – 10	
11	11	11 + 10 = 21	11 – 10 = 1	21 > 3 · 1 = 3
12	12	12 + 10 = 22	12 – 10 = 2	22 > 3 · 2 = 6
13	13	13 + 10 = 23	13 – 10 = 3	23 > 3 · 3 = 9

Wir erkennen, dass der Vergleich noch sehr weit auseinanderliegt. Wir probieren deshalb mit größeren Anzahlen für Kreisa:

Anzahl Kastanien		Anzahl Kastanien nach Tausch		Vergleich
Kreisa	Quadrato	Quadrato + 10	Kreisa – 10	
18	18	18 + 10 = 28	18 – 10 = 8	28 > 3 · 8 = 24
19	19	19 + 10 = 29	19 – 10 = 9	29 > 3 · 9 = 27
20	**20**	**20 + 10 = 30**	**20 – 10 = 10**	**30 = 3 · 10 = 30**
21	21	21 + 10 = 31	21 – 10 = 11	31 < 3 · 11 = 32

Die Aussage von Quadrato ist erfüllt, wenn beide jeweils 20 Kastanien sammelten. Die Probe ist in der Tabelle vollständig enthalten.

Lösungsvariante: Wir nehmen an, Kreisa und Quadrato haben jeweils X Kastanien gesammelt. Nach Aussage von Quadrato gilt:

$$X + 10 = 3 \cdot (X - 10), \text{ also } X + 10 = 3 \cdot X - 30.$$

Aus dieser Gleichung finden wir, dass nur der Wert X = 20 richtig sein kann.

Aufgabe 3 – Hinweis: Um alle Reihenfolgen einfach aufschreiben zu können, kürzen wir die Blattarten mit ihren Anfangsbuchstaben ab, also K (für Kastanienblatt), E (für Eichenblatt) und A (für Ahornblatt). Es genügt, jeweils die Liste der Reihenfolgen aufzuschreiben. Folgende Erklärungen werden nicht erwartet.

Aufgabe 3a – Antwortsatz. Es es 12 verschiedene Reihenfolgen.

Begründung: Insgesamt wollte Kreisa 5 Blätter an 5 Positionen (1 bis 5) aufhängen.

?	?	?	?	?
1	2	3	4	5

Kreisa will A an Position 1 aufzuhängen. Wenn sie an zweiter Stelle ein K oder E aufhängt, ist die weitere Reihenfolge bereits festgelegt (weil gleiche Blätter nicht nebeneinander hängen sollen). Es gibt also nur 2 Möglichkeiten mit A an Position 1. Damit wissen wir aber bereits, dass es auch nur 2 Möglichkeiten mit A an Position 5 gibt (weil wir die Reihenfolge umdrehen können):

A	K	E	K	E
A	E	K	E	K

E	K	E	K	A
K	E	K	E	A

Nun will Kreis A an Position 2 hängen. Auch in diesem Fall gibt es nur 2 Möglichkeiten, die Bedingungen zu erfüllen. Damit wissen wir bereits, dass es auch nur 2 Möglichkeiten mit A an Position 4 gibt (weil wir die Reihenfolge umdrehen können):

E	A	K	E	K
K	A	E	K	E

K	E	K	A	E
E	K	E	A	K

Nun hat Kreisa noch die Möglichkeit, A in der Mitte an Position 3 aufzuhängen. Damit gleiche Blätter nicht nebeneinander hängen, müssen links und rechts jeweils ein Blatt der beiden Arten hängen. Sie findet 4 verschiedene Möglichkeiten:

E	K	A	E	K
E	K	A	K	E

K	E	A	E	K
K	E	A	K	E

Insgesamt gibt es also (2 + 2 + 2 + 2 + 4 =) 12 verschiedene Reihenfolgen.

Aufgabe 3b – Anwortsatz: Es gibt 10 verschiedene Reihenfolgen.

Begründung: Wie schon in Aufgabe 3a) legen wir in der Kette

?	?	?	?	?	?
1	2	3	4	5	6

die Position A fest und untersuchen, wie viele Möglichkeiten es dann gibt, 3 K und 2 E aufzuhängen.
Sie will A an Position 1 aufzuhängen. Dann kann sie an Position 2 kein E aufhängen, weil in diesem Fall auf den restlichen vier Stellen 3 K und 1 E hängen müssten. Es gibt also nur 1 Möglichkeit. Dann gibt es auch nur 1 Möglichkeit, wenn A auf Position 6 hängt (weil wir die Reihenfolge umdrehen können).

A	K	E	K	E	K

K	E	K	E	K	A

Nun will Kreisa A an Position 2 hängen. In diesem Fall gibt es nur 2 Möglichkeiten: Sie muss links von A ein K hängen und rechts können die verbleibenden 4 Blätter abwechselnd hängen. Dann gibt es aber auch nur 2 Möglichkeiten, wenn A auf Position 5 hängt (weil wir die Reihenfolge umdrehen können).

K	A	E	K	E	K
K	A	K	E	K	E

K	E	K	E	A	K
E	K	E	K	A	K

Hängt Kreisa A an Position 3, muss links davon 1 K und 1 E hängen. Rechts ist dann die Reihenfolge bereits festgelegt. Somit hat Kreisa 2 Möglichkeiten. Dann gibt es auch nur 2 Möglichkeiten, wenn A auf Position 4 hängt (weil wir die Reihenfolge umdrehen können).

K	E	A	K	E	K
E	K	A	K	E	K

K	E	K	A	E	K
K	E	K	A	K	E

Insgesamt sind es also (2 + 4 + 4 =) 10 Möglichkeiten.

Aufgabe 4 – Antwortsatz: Frau Dreieck hat sicherlich bemerkt, dass ihre Antwort und die Antwort von Kreisa nicht beide richtig sein können. Wenn nur eine Antwort richtig ist, ist Kreisa das Missgeschick passiert.

Begründung: Da Frau Dreieck das Gegenteil von Kreisa (und auch das Gegenteil von Quadrato) aussagt, können nicht alle Aussagen richtig sein.

Es könnten also die zwei Aussagen von Kreisa und Quadrato falsch sein. Das ist bei nur einer falschen Aussage aber nicht möglich. Deshalb muss die Aussage von Frau Dreieck falsch sein. Da es nur eine falsche Aussage gibt, ist die Aussage von Herrn Raute richtig. Also war es Kreisa.

Lösungsvariante: Jedem könnte das Missgeschick passiert sein – wir untersuchen, welche Aussagen in jedem dieser Fälle richtig sind:

	Sind in diesem Fall die Aussagen richtig oder falsch?				
Wem passierte es?	Frau Dreieck	Kreisa	Quadrato	Herr Raute	Anzahl der falsche Aussagen
Frau Dreieck	Falsch	Richtig	Richtig	Falsch	2
Kreisa	Falsch	Richtig	Richtig	Richtig	1
Quadrato	Richtig	Falsch	Falsch	Falsch	3
Herr Raute	Falsch	Richtig	Richtig	Falsch	2

Nur wenn es Kreisa war, ist genau eine der 4 Aussagen falsch.

Teil B: Zahlenspiele: Noch einmal immer 20!

Antwort zu Aufgabe 1a) Es ist nicht schwierig, Karten wie gefordert auszuwählen. Es gibt viele Möglichkeiten. Es genügt aber bei dieser Aufgabenstellung, nur ein korrektes Beispiel anzugeben:

1 + 2 + 8 + 9, 1 + 3 + 7 + 9, 1 + 4 + 6 + 9, 1 + 4 + 7 + 8,
1 + 5 + 6 + 8, 2 + 3 + 6 + 9, 2 + 3 + 7 + 8, 2 + 4 + 5 + 9,
2 + 4 + 6 + 8, 2 + 5 + 6 + 7, 3 + 4 + 5 + 8, 3 + 4 + 6 + 7,
3 + 8 + 9, 4 + 7 + 9, 5 + 6 + 9, 5 + 7 + 8.

Antwort zu Aufgabe 1b) Quadrato hat natürlich recht, denn das erste Beispiel aus Aufgabe 1a) kann er aus seinen Zahlen auswählen.

Kreisa stellt fest, dass Quadrato die Summen 1, 2, 3, 8 und 9 bereits mit einer Karte und zudem die folgenden Summen erreichen kann:

4 = 1 + 3, 5 = 2 + 3, 6 = 1 + 2 + 3,
10 = 1 + 9 = 2 + 8, 11 = 2 + 9 = 3 + 8, 12 = 1 + 2 + 9 = 1 + 3 + 8,
13 = 1 + 3 + 9 = 2 + 3 + 8, 14 = 2 + 3 + 9 = 1 + 2 + 3 + 8,
15 = 1 + 2 + 3 + 9, 17 = 8 + 9, 18 = 1 + 8 + 9,
19 = 2 + 8 + 9, 20 = 1 + 2 + 8 + 9

Nur die Summen 7 und 16 lassen sich nicht berechnen.

Antwort zu Aufgabe 1c) Herr Raute hat recht. In Aufgabe 1a sehen wir, dass bereits in verschiedenen Varianten 4 Karten genügen, um die Summe 20 zu erreichen.

Antwort zu Aufgabe 2a) Quadrato hat recht. Stehen nämlich auf der 4. Zeile nur gerade Zahlen, so sind alle darüberstehenden Zahl ebenfalls gerade. Quadrato muss aber prüfen, ob auf diese Weise in der 1. Zeile 20 stehen kann. Er findet drei Beispiele (es genügt, ein Beispiel anzugeben):

20			
12	8		
8	4	4	
6	2	2	2

20			
10	10		
6	4	6	
4	2	2	4

20			
8	12		
4	4	8	
2	2	2	6

Aufgabe 2b) Kreisa hat recht. Um es zu begründen, können wir alle Möglichkeiten ausprobieren, auf der 4. Zeile ungerade Zahlen zu platzieren. Wir wissen:

- ungerade Zahl + ungerade Zahl ergibt eine gerade Zahl (g)
- gerade Zahl + ungerade Zahl ergibt eine ungerade Zahl (u)
- gerade Zahl + gerade Zahl ergibt eine gerade Zahl (g)

Fall 1: Auf der 4. Zeile stehen 4 ungerade Zahlen – dann ist die Behauptung von Kreisa bereits erfüllt. Es gibt Rechenmauern dieser Art, zum Beispiel:

20			
g	g		
g	g	g	
u	u	u	u

20			
10	10		
6	4	6	
5	1	3	3

Fall 2: Auf der 4. Zeile stehen 3 ungerade Zahlen – dafür gibt es (bis auf Spiegelbilder) zwei Möglichkeiten der Anordnung:

u			
g	u		
g	g	u	
u	u	u	g

u			
u	g		
g	u	u	
u	u	g	u

Zwar finden wir ebenfalls jeweils mehr als 5 ungerade Zahlen in den Rechenmauern, aber in der 1. Zeile steht auch eine ungerade Zahl – es gibt also keine Rechenmauern mit 20 in der 1. Zeile.

Fall 3: Auf der 4. Zeile stehen 2 ungerade Zahlen – dafür gibt es (bis auf Spiegelbilder) vier Möglichkeiten der Anordnung:

g			
u	u		
g	u	g	
u	u	g	g

20			
7	13		
2	5	8	
1	1	4	4

g			
g	g		
u	u	u	
u	g	u	g

20			
10	10		
5	5	5	
1	4	1	4

g			
u	u		
u	g	u	
u	g	g	u

20			
11	9		
5	6	3	
1	4	2	1

g			
u	u		
u	g	u	
g	u	u	g

20			
11	9		
9	2	7	
8	1	1	6

Wir zählen jeweils mindestens 5 ungerade Zahlen in den Rechenmauern.

Fall 4: Auf der 4. Zeile steht 1 ungerade Zahl – dafür gibt es (bis auf Spiegelbilder) zwei Möglichkeiten der Anordnung:

u			
u	g		
u	g	g	
u	g	g	g

u			
g	u		
u	u	g	
g	u	g	g

Zwar finden wir ebenfalls jeweils mindestens 5 ungerade Zahlen in den Rechenmauern, aber in der 1. Zeile steht auch eine ungerade Zahl – es gibt also keine Rechenmauern mit 20 in der 1. Zeile.

Aufgabe 2c) – Antwortsatz: Es gibt 5 verschiedene Rechenmauern, bei denen die Summe der Zahlen in der 4. Zeile 8 ergibt.

Wir finden 5 Möglichkeiten, so dass 4 Zahlen die Summe 8 ergeben: 1 + 1 + 1 + 5, 1 + 1 + 2 + 4, 1 + 1 + 3 + 3, 1 + 2 + 2 + 3, 2 + 2 + 2 + 2. Nur die ersten drei Möglichkeiten lassen sich so anordnen, dass in der 1. Zeile die 20 steht.

20			
8	12		
2	6	6	
1	1	5	1

20			
11	9		
5	6	3	
1	4	2	1

20			
10	10		
4	6	4	
1	3	3	1

Auch die Spiegelbilder der linken und der mittleren Rechenmauer erfüllen die Bedingung, so dass es 5 Rechenmauern mir der geforderten Eigenschaft gibt.

Antwort zu Aufgabe 2d) Wenn die Summe der vier Zahlen eine ungerade Zahl ergibt, müssen entweder eine ungerade Zahl oder drei ungerade Zahlen in der 4. Zeile stehen. Wir haben aber in Aufgabe 2b) gesehen, dass in diesen Fällen das Ergebnis in der 1. Zeile ungerade ist, also nicht 20 ergeben kann.

Antwort zur Aufgabe 3a) Quadrato könnte sich die Zahlen 2 oder 6 gemerkt haben, um mit Faktor 3 und Summand 4 auf 50 zu kommen.

Begründung: Hat sich Quadrato eine ungerade Zahl gemerkt, so bleiben die Zwischenergebnisse nach Multiplikation mit 3 und nach Addition mit 4 ebenfalls ungerade. Er kann also 50 nicht erreichen.

Hat sich Quadrato die Zahl 4 oder die Zahl 8 gemerkt (also ein Vielfaches von 4), so bleiben die Zwischenergebnisse nach Multiplikation und nach Addition mit ebenfalls ein Vielfaches von 4. Er kann also 50 nicht erreichen.

Wir nehmen an, Quadrato hat sich die Zahl 2 gemerkt. Dann erreicht er so 50:

$2 \cdot 3 = 6, 6 \cdot 3 = 18, \underbrace{18 + 4 = 22, \dots, 46 + 4 = 50}_{\text{immer Addition von 4}}$

$2 + 4 = 6$ und weiter wie eben

$2 + 4 = 6, 6 + 4 = 10, 10 \cdot 3 = 30, \underbrace{30 + 4 = 34, \dots, 46 + 4 = 50}_{\text{immer Addition von 4}}$

$2 + 4 = 6, 6 + 4 = 10, 10 + 4 = 14, 14 \cdot 3 = 42, 42 + 4 = 46, 46 + 4 = 50$

Da in diesen Rechenschritten die Zahl 6 als Zwischenergebnis erscheint, kann sich Quadrato auch die Zahl 6 gemerkt haben.

Lösungsvariante: Es ist günstig, rückwärts zu rechnen.

- Da 50 kein Vielfaches von 3 ist, wurde vorher 4 addiert: 46 + 4 = 50.
- Da 46 kein Vielfaches von 3 ist, wurde vorher 4 addiert: 42 + 4 = 46.
- Da 42 durch 3 teilbar ist, könnte vorher mit 3 multipliziert sein:14 · 3 = 42.
- Da 14 kein Vielfaches von 3 ist, wurde vorher 4 addiert: 10 + 4 = 14.
- Da 10 kein Vielfaches von 3 ist, wurde vorher 4 addiert: 6 + 4 = 10.

Er könnte sich also die Zahl 6 gemerkt haben. Wegen 2 + 4 = 6 und 2 · 3 = 6 könnte er sich auch die Zahl 2 gemerkt haben.

Es genügte, eine mögliche Startzahl zu finden. Ergänzend können wir untersuchen, ob auch andere Startzahlen möglich sind. Würden wir oben 42 nicht durch 3 teilen, sondern vorher 4 addieren, kommen wir nach einigen Rechenschritten auf 30. Hier könnten wir wieder sowohl durch 3 teilen als auch vorher 4 addieren. So kommen wir nach einigen Rechenschritten auf 18 oder 10 – jedesmal erreichen wir auf diesen Wegen die Startzahl 6 (oder 2).

Antwort zu Aufgabe 3b) Wie wir in Aufgabe 3a) bereits gesehen haben, muss der Faktor eine ungerade Zahl gewesen sein, damit das Ergebnis eine ungerade Zahl wird. Wenn der Faktor 3 ist, finden wie folgende Rechenschritte

5 · 3 = 15, 15 + 6 = 21, 21 + 6 = 27, 27 + 6 = 33, 33 + 6 = 39
oder 5 + 6 = 11, 11 · 3 = 33, 33 + 6 = 39

Ist der Faktor 5, kann zuerst nicht die 6 addiert werden (5 + 6 = 11), weil 11 · 5 = 55 bereits größer als 39 ist und der Rest (39 – 11 =) 28 nicht durch wiederholte Addition mit 6 ausgefüllt werden kann.

Ist der Faktor 5, kann zuerst nicht mit 5 multipliziert werden, weil von 5 · 5 = 25 der Rest (39 – 25 =) 14 nicht durch wiederholte Addition mit 6 ausgefüllt werden kann.

Ist der Faktor größer als 5, kann die Multiplikation nicht zuerst auftreten, weil bereits 7 · 5 = 35 zu nahe an 39 liegt. Ohne Multiplikation kann 39 wegen (39 – 5 =) 34 nicht durch wiederholte Addition mit 6 erreicht werden.

Lösungsvariante: Auch bei dieser Aufgabe können wir rückwärts rechnen:

- Da 39 durch 3 teilbar ist, könnte davor mit 3 multipliziert sein: 13 · 3 = 39.
- Da 13 kein Vielfaches von 3 ist, wurde davor 6 addiert: 7 + 6 = 13. Von 7 kommen wir jedoch nicht auf die Startzahl 5.

- Da 39 durch 13 teilbar ist, könnte davor mit 13 multipliziert sein: 3 · 13 = 39. Doch ist 3 bereits kleiner als die Startzahl 5.

- Im letzten Schritt wurde also 6 addiert: 33 + 6 = 39.
- Da 33 durch 3 teilbar ist, könnte davor mit 3 multipliziert sein: 11 · 3 = 33. Auf 11 kommen wir mit 5 + 6 = 11. **Also könnte der Faktor 3 sein.**

Es genügte, einen möglichen Faktor zu finden. Ergänzend können wir untersuchen, ob auch andere Faktoren möglich sind.

Ausgehend von 33 könnten wir den Faktor 11 probieren, doch damit erreichen wir nicht die Startzahl 5.

- Würde davor nochmals 6 addiert, erreichen wir 27. Wir könnten den Faktor 9 probieren – doch damit kommen wir nicht auf die Startzahl 5.
- Würde davor nochmals 6 addiert, erreichen wir 21. Wir könnten den Faktor 7 probieren – doch damit kommen wir nicht auf die Startzahl 5.
- Würde davor nochmals 6 addiert, erreichen wir 15. Wir könnten den Faktor 5 probieren – doch damit kommen wir nicht auch auf die Startzahl 5.