Hallo «Vorname» (Klasse «Kl»),

toll, dass du an der 3. Runde des diesjährigen LOGO-Korrespondenzzirkels teilgenommen hast. Darüber haben wir uns sehr gefreut. Bei der Punktevergabe wurde nicht nur das richtige Ergebnis im Antwortsatz bewertet. Auch für die Herleitung, die Begründung oder die Probe wurden Punkte vergeben.

Bewertung	**Teil A**				**Teil B**		
	A1	**A2**	**A3**	**A4**	**B1**	**B2**	**B3**
Deine Punktzahl	?	?	?	?	?	?	ß
Mögliche Punktzahl	**2**	**3**	**3**	**3**	**4**	**4**	**1**

Du hast insgesamt **? Punkte** von 20 möglichen Punkten erreicht!

Wir wünschen dir weiterhin viel Spaß und Erfolg beim Knobeln und Rechnen.
Es grüßt dich herzlich

Norman Bitterlich

Vergleiche nun deine Lösungen mit den folgenden Hinweisen.

****

Teil A: Fahrrad-Ausflug

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz: Die Strecke betrug 27 km.

Herleitung: Da wir nicht wissen, um wie viele Kilometer Quadrato mit seiner Angabe daneben lag, probieren wir alle Möglichkeiten. Wir schreiben unsere Überlegungen übersichtlich in eine Tabelle:

Angabe von Quadrato: 23 km	Tatsächliche Strecke	Angabe von Kreisa		Angabe von Frau Dreieck	
2 km zu wenig	23 + 2 = 25	32 – 25 = 7	7 km daneben nicht möglich	29 – 25 = 4	4 km daneben nicht möglich
2 km zu viel	23 – 2 = 21	32 – 21 = 9	9 km daneben nicht möglich	29 – 21 = 8	8 km daneben nicht möglich
4 km zu wenig	**23 + 4 = 27**	**32 – 27 = 5**	**5 km daneben möglich**	**29 – 27 = 2**	**2 km daneben möglich**
4 km zu viel	23 – 4 = 19	32 – 19 = 13	13 km daneben nicht möglich	29 – 19 = 10	10 km daneben nicht möglich
5 km zu wenig	23 + 5 = 28	32 – 28 = 4	4 km daneben möglich	29 – 28 = 1	1 km daneben nicht möglich
5 km zu viel	23 – 5 = 18	32 – 18 = 14	14 km daneben nicht möglich	29 – 18 = 11	11 km daneben nicht möglich

Nur wenn die tatsächliche Strecke 27 km lang war, hat Herr Raute mit seinen drei Aussagen recht.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2) Wir kürzen die Namen mit ihren Anfangsbuchstaben ab: Q (**Q**uadrato), K (**K**reisa), D (Frau **D**reieck) und R (Herr **R**aute).

Antwortsatz zu Aufgabe 2a) Es gibt 24 verschiedene Anordnungen.

Begründung: Wir schreiben alle Möglichkeiten auf, die 4 Buchstaben anzuordnen.

QKDR	QKRD	QDKR	QDRK	QRDK	QRKD
KQDR	KQRD	KDQR	KDRQ	KRDQ	KRQD
DKQR	DKRQ	DQKR	DQRK	DRQK	DRKQ
RKDQ	RKQD	RDKQ	RDQK	RQDK	RQKD

Antwortsatz zu Aufgabe 2b) Es gibt 18 verschiedene Anordnungen, wenn Frau Dreieck nicht vorn fahren will.

Begründung: Wir streichen alle Möglichkeiten, bei denen D an erster Stelle (also links) steht.

QKDR	QKRD	QDKR	QDRK	QRDK	QRKD
KQDR	KQRD	KDQR	KDRQ	KRDQ	KRQD
~~DKQR~~	~~DKRQ~~	~~DQKR~~	~~DQRK~~	~~DRQK~~	~~DRKQ~~
RKDQ	RKQD	RDKQ	RDQK	RQDK	RQKD

Antwortsatz zu Aufgabe 2c) Es gibt 8 verschiedene Anordnungen, wenn zusätzlich Quadrato und Kreisa stets direkt hintereinander fahren wollen.

Begründung: Wir streichen zusätzlich zur Teilaufgabe b) alle Möglichkeiten, bei denen Q und K nicht direkt nebeneinander stehen:

QKDR	**QKRD**	~~QDKR~~	~~QDRK~~	~~QRDK~~	~~QRKD~~
KQDR	**KQRD**	~~KDQR~~	~~KDRQ~~	~~KRDQ~~	~~KRQD~~
~~DKQR~~	~~DKRQ~~	~~DQKR~~	~~DQRK~~	~~DRQK~~	~~DRKQ~~
~~RKDQ~~	**RKQD**	**RDKQ**	**RDQK**	~~RQDK~~	**RQKD**

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz: Sie müssen noch 21 Kilometer fahren, um wieder zu Hause anzukommen.

Herleitung: Wir lösen die Aufgabe durch systematisches Probieren. Dazu tragen wir in eine Tabelle die Ergebnisse ein, wenn wir die Anzahl der Kilometer bis zur ersten Rast raten. Gleich beim ersten Versuch erkennen wir, dass die Anzahl der Kilometer bis zur 1. Rast eine gerade Zahl sein muss, damit sich auch für den letzten Abschnitt eine ganze Anzahl von Kilometern ergibt.

Anzahl km bis zur 1. Rast	Anzahl km von 1. zur 2. Rast	Entfernung von 2. Rast zum Museum	Anzahl km für letzten Abschnitt	Summe	Vergleich mit 31 km
1	1	6	1 : 2 nicht ganzzahlig		
2	2	6	2 : 2 = 1	2 + 2 + 6 + 1 = 11	11 < 31
4	4	6	4 : 2 = 2	4 + 4 + 6 + 2 = 16	16 < 31
6	6	6	6 : 2 = 3	6 + 6 + 6 + 3 = 21	21 < 31
8	8	6	8 : 2 = 4	8 + 8 + 6 + 4 = 26	26 < 31
10	**10**	**6**	**10 : 2 = 5**	**10 + 10 + 6 + 5 = 31**	**31 = 31**
12	12	6	12 : 2 = 6	12 + 12 + 6 + 6 = 36	36 > 31

Nur wenn es bis zur 1. Rast 10 km weit war, ergeben sich für den gesamten Ausflug 31 km. Also mussten sie nach der ersten Rast noch (31 – 10 =) 21 km fahren, um zu Hause anzukommen.

In der Tabelle ist die Probe bereits ablesbar.

Lösungsvariante: Wir stellen eine Gleichung auf und bezeichnen mit x die Anzahl der Kilometer bis zur ersten Rast. Dann wissen wir aus den Angaben im Text:

Entfernung von 1. zur 2. Rast: x
Entfernung von 2. Rast zum Museum: 6
Entfernung Museum bis nach Hause: $\frac{1}{2}x$

Also gilt für die gesamte Strecke: $x + x + 6 + \frac{1}{2}x = 31$
$2x + \frac{1}{2}x = 31 - 6 = 25$

Daraus ermitteln wir (zum Beispiel durch Probieren) $x = 10$

Probe: $(10 + 10 + 6 + 5 =)\ 31$

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz: Der aktuelle Kilometerstand nach diesem Ausflug kann 111 km oder 222 km gewesen sein.

Probe: Es gilt 111 – 31 = 80 (auf dem Kilometerzähler als 080 lesbar) und alle Bedingungen der Aufgabe sind erfüllt. Es gilt 222 – 31 = 191 und alle Bedingungen der Aufgabe sind auch hierbei erfüllt.

Herleitung: Es gibt 9 dreistellige Zahlen, die aus lauter gleichen Ziffern bestehen. Von diesen subtrahieren wir 31.

111 – 31 = 80 (**= 080**) **222 – 31 = 191** 333 – 31 = 302 444 – 31 = 413

555 – 31 = 524 666 – 31 = 635 777 – 31 = 746 888 – 31 = 857

999 – 31 = 968

Lösungsvariante: Wenn vom Kilometerstand nach dem Ausflug 31 subtrahiert wird, verringert sich die Ziffer an der Einerstelle um 1. Weil vor dem Ausflug eine Palindromzahl stehen soll, muss sich bei Subtraktion mit 31 auch die Hunderter-Stelle um 1 verringern. Für Zahlen aus lauter gleichen Ziffern ist dies nur für 111 oder 222 möglich. Durch Probieren erkennen wir, dass 111 und 222 die einzige Möglichkeit ist, alle Bedingungen der Aufgabe zu erfüllen.

Hinweis: Wer 111 – 31 = 80 richtig gerechnet hat und übersah, dass auf dem Kilometerzähler die Anzeige 080 steht, erhält dennoch voll Punktzahl. Da der Kilometerzähler nur drei Stellen anzeigt, könnte auch nach dem Ausflug 000 zu sehen sein, nämlich wenn nach 999 die Zahl 1000 nur als 000 angezeigt wird. Wegen 1000 – 31 = 969 finden wir eine weitere Lösung mit der Anzeige 000 auf dem Kilometerzähler.

****

Teil B: Schlangen und Rahmen aus Würfeln

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a) Es gibt 6 Positionen auf dem 4x4-Feld, auf denen die Würfel-Schlange enden kann.

X			
	X		
O		X	
	X		O

Begründung: Wir legen 4 Würfel auf das Feld, wobei wir den 2. Würfel oberhalb des 1. Würfels legen. Auf diese Weise finden wir 4 Positionen, an denen die Würfel-Schlange enden kann (mit X markiert).

4			
3			
2			
1			

3	4		
2			
1			

	4		
2	3		
1			

2	3	4	
1			

2	3		
1	4		

Legen wir dagegen den 2. Würfel rechts neben den 1. Würfel, finden wir noch zwei zusätzliche Positionen, auf denen die Würfel-Schlange enden kann (mit O markiert).

1	2	3	4

		4	
1	2	3	

	4		
	3		
1	2		

	3	4	
1	2		

4	3		
1	2		

Es sind also genau die 6 markierten Positionen im 4x4-Feld möglich.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1b) Wir können alle möglicherweise passenden Würfel-Schlangen auflegen und stellen fest, dass der Würfel 7 nicht neben dem Startwürfel 1 liegen kann. Wir zeichnen den Würfel 7 bereits ein.

Legen wir die Würfel zunächst so weit wie möglich oberhalb vom Würfel 1 (Abbildung 1), so kann der Würfel 6 den Würfel 7 nicht berühren.

Legen wir die Würfel 2 bis 4 oberhalb vom Würfel 1 (Abbildung 2), so kann der Würfel 6 ebenfalls den Würfel 7 nicht berühren.

Legen wir nur die Würfel 2 und 3 oberhalb vom Würfel 1 (Abbildungen 3 und 4), so kann der Würfel 6 den Würfel 7 nur an einer Ecke berühren (und wird deshalb keine Würfel-Schlange).

5	6			
4				
3				
2				
1	7			

Abbildung 1

4	5			
3	6			
2				
1	7			

Abbildung 2

3	4			
2	5	6		
1	7			

Abbildung 3

3	4	5		
2		6		
1	7			

Abbildung 4

Auch wenn wir nur den Würfel 2 oberhalb vom Würfel 1 legen (Abbildungen 5 bis 7), finden wir keine Möglichkeit, dass sich die Würfel 6 und 7 an einer Seite berühren.

	4	5		
2	3	6		
1	7			

Abbildung 5

2	3	4	5	
1	7		6	

Abbildung 6

2	3	4		
1	7	5	6	

Abbildung 7

Ähnliche Beobachtungen ergeben sich, wenn wir statt „oberhalb von 1“ mit „rechts von 1“ beginnen. In keinem Fall können wir die Aufgabe lösen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1c) Die Würfel-Schlange muss mindestens 11 Würfel lang sein, damit der Würfel mit der höchsten Nummer auf dem Kästchen rechts oben liegt.

6	7	8	9	10	11
5					
4					
3					
2					
1					

Begründung: Es ist nicht schwer, mit einer Würfelschlange aus 11 Würfeln die rechte obere Ecke zu erreichen. Aber egal, wie die Würfelschlange gelegt wird: nach dem 1. Würfel links unten müssen mindestens 5 Würfel nach oben und mindestens 5 Würfel nach rechts gelegt werden. Es sind also immer mindestens (1 + 5 + 5 =) 11 Würfel erforderlich.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1d) Kreisa hat nicht recht.

Begründung: Es gelingt nicht, eine Würfel-Schlange aus 36 Würfeln auf das 6x6-Feld zu legen. Es bleibt immer das Feld links neben dem Feld links oben (mit X markiert) oder unterhalb des Feldes links oben frei. Die längste Würfel-Schlange hat also 35 Würfel (Achtung: Wir beginnen mit 1 immer links unten!).

6	7	18	19	X	35
5	8	17	20	33	34
4	9	16	21	32	31
3	10	15	22	29	30
2	11	14	23	28	27
1	12	13	24	25	26

Begründung: Wir nummerieren die Zeilen und Spalten des 6x6-Feldes und füllen die Felder wie eine Additionstabelle aus. Am Startfeld links unter beginnt die Würfel-Schlange mit einer geraden Zahl (2). Wird der nächste Würfel gelegt, so liegt er auf einer ungeraden Zahl. Das setzt sich so fort: Abwechselnd liegen die Würfel also auf einer geraden und einer ungeraden Zahl.

Besteht also die Würfel-Schlange aus einer geraden Anzahl von Würfel, so liegt der letzte Würfel auf einem Feld mit ungerader Zahl – das kann aber nicht links oben sein! Es können also nicht 36 Würfel sein. Eine Lösung mit 35 Würfeln haben wir bereits gefunden.

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7

Lösungshinweise zu Aufgabe 2a) Quadrato benötigt 12 Würfel, um einen Würfel-Rahmen mit 3 umrahmten Feldern zu legen.

Begründung: Die drei umrahmten Felder können nebeneinander (Abbildung links) oder im Eck (Abbildung Mitte) liegen. In beiden Fällen genügen 12 Würfel für den Würfel-Rahmen.

Von den umrahmten Feldern kann nicht ein Feld wie in der rechten Abbildung isoliert umrahmt werden, weil von Nr. 11 zu Nr. 12 das Feld mit der Nr. 10 im Rahmen noch einmal durchlaufen werden muss.

11	10	9	8	7
12				6
1	2	3	4	5

10	9	8	
11		7	6
12			5
1	2	3	4

14	13	12	10	9	8
15			11		7
1	2	3	4	5	6

Ergänzung: Wenn aber Quadrato einzelne umrahmte Felder mit breiten Stegen abgrenzt, würden ebenfalls Würfel-Rahmen entstehen – aber Quadrato will natürlich möglichst wenige Würfel in seinen Würfel-Rahmen verbauen, so dass die folgenden Abbildungen nicht als Antwort erwartet werden.

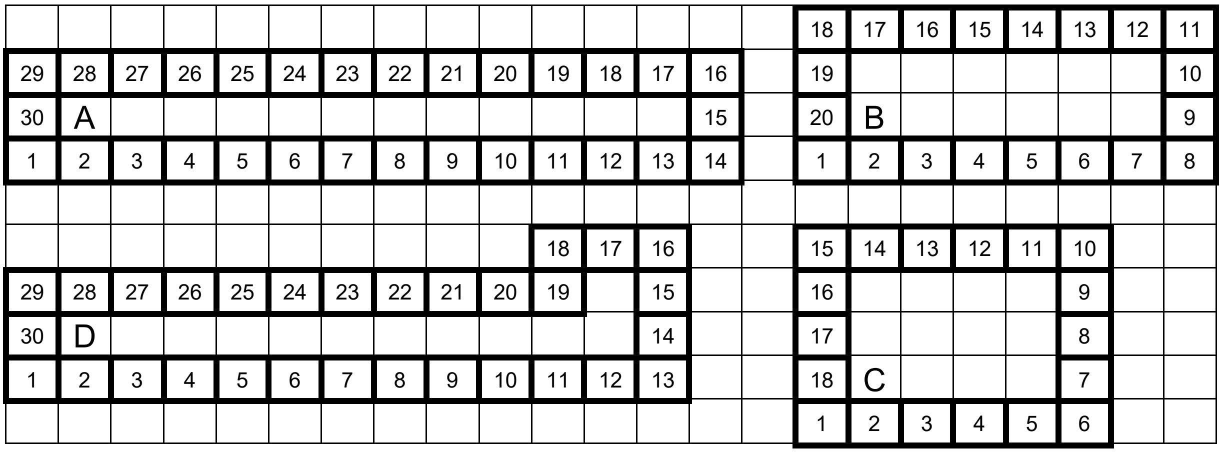
17	16	15	14	11	10	9
18			13	12		8
1	2	3	4	5	6	7

23	22	21	18	17	16	13	12	11
24		20	19		15	14		10
1	2	3	4	5	6	7	8	9

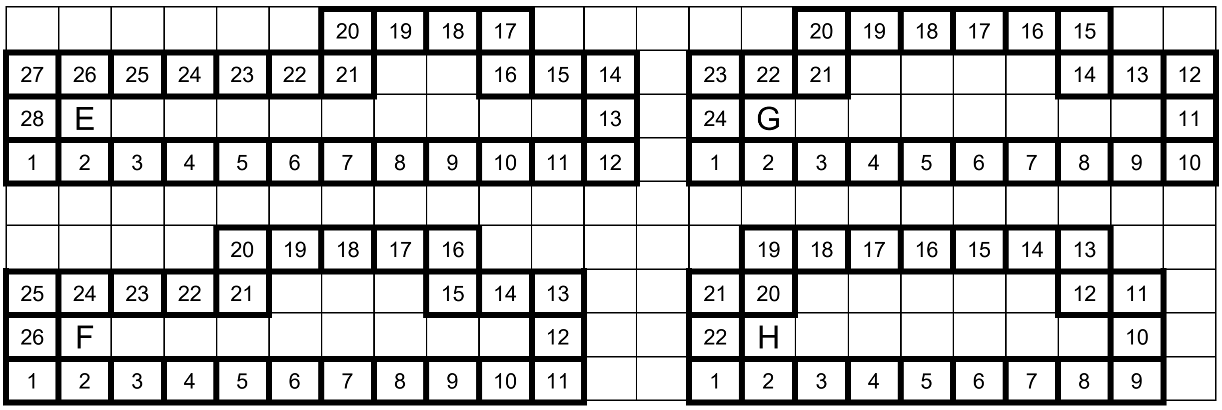
Lösungshinweise zu Aufgabe 2b) Wir überlegen uns, wie viele Möglichkeiten es gibt, 12 Felder anzuordnen. Zunächst betrachten wir die 1x12-, 2x6- und 3x4-Rechtecke, denn es gilt 12 = 1 · 12 = 2 · 6 = 3 · 4.

Um diese Rechtecke zu umrahmen, benötigen wir 30 Würfel (für Rahmen A), 20 Würfel (für Rahmen B) und 18 Würfel (für Rahmen C).

Es sind aber auch Rahmen möglich, die keine Rechtecke bilden. So können wir 11 Felder in eine Reihe legen und das 12. Feld oberhalb dieser Reihe anfügen (Rahmen D), Egal, wo wir dieses 12. Feld anfügen – es werden immer 30 Würfel für den Rahmen benötigt.



Wenn wir nur 10 Felder in eine Reihe legen und zwei weitere Felder oberhalb dieser Reihe anfügen, so benötigen wir auch 30 Würfel, solange sich die zwei angefügten Felder nicht berühren. Liegen die zwei angefügten Felder aber direkt nebeneinander (Rahmen E), so werden nur noch 28 Würfel benötigt. Auf diese Weise finden wir auch Würfel-Rahmen mit 26 Würfel (Rahmen F), 24 Würfel (Rahmen G) und 22 Würfel (Rahmen H).



Die Würfel-Rahmen können auch anders aussehen, es sind aber immer 18, 20, 22, 24, 26, 28 oder 30 Würfel erforderlich (wenn sich die umrahmten Felder berühren).

Lösungshinweise zu Aufgabe 2c) Wir finden beim Experimentieren keinen Würfel-Rahmen mit einer ungeraden Anzahl von Würfeln. Wir erkennen, dass es im Würfel-Rahmen

- zu jedem Würfel, der oberhalb seines Vorgängers gelegt wird, einen Würfel geben muss, der unterhalb seines Vorgängers gelegt wird, und
- zu jedem Würfel, der rechts seines Vorgängers gelegt wird, einen Würfel geben muss, der links seines Vorgängers gelegt wird.

Wir betrachten zum Beispiel den Würfel-Rahmen aus Aufgabe 2a. Wir vergleichen

1 – 2 nach rechts und 9 – 10 nach links
2 – 3 nach rechts und 8 – 9 nach links
3 – 4 nach rechts und 6 – 7 nach links
4 – 5 nach oben und 12 – 1 nach unten
5 – 6 nach oben und 11 – 12 nach unten
7 – 8 nach oben und 10 – 11 nach unten

10	9	8	
11		7	6
12			5
1	2	3	4

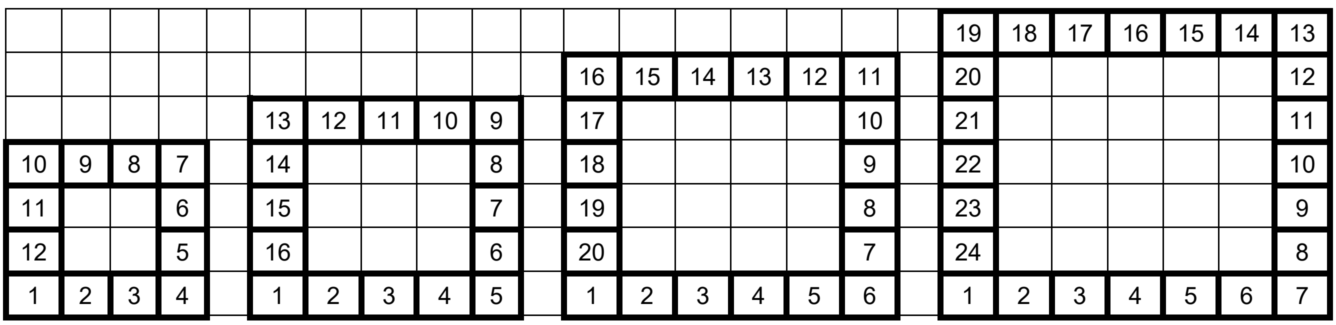
Somit gibt es zu jedem Würfel einen passenden anderen Würfel im Würfel-Rahmen. Die Anzahl der Würfel muss also eine gerade Zahl sein. Deshalb ist die Aufgabe, mit 13 Würfeln möglichst viele Kästchen vollständig zu umrahmen, nicht lösbar.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3) Kreisa hat nicht recht. Es gibt Würfel-Rahmen, bei denen die Anzahl der Würfel kleiner als die Anzahl der umrahmten Felder ist.

Begründung: Zur Beantwortung der Frage genügt es, ein Beispiel anzugeben, das der Aussage von Kreisa widerspricht.

Wir betrachten als Beispiele quadratische Felder, die wir umrahmen wollen. Für kleine quadratische Felder ist die Aussage von Kreisa erfüllt.

Aber wenn ein 5x5-Feld (bestehend aus $5 \cdot 5 = 25$ Feldern) umrahmt werden soll, genügen bereits 24 Würfel für den Würfel-Rahmen.



Rahmen 12 Rahmen 16 Rahmen 20 Rahmen 24
Inneres 4 Inneres 9 Inneres 16 Inneres 25
$12 > 4$ $16 > 9$ $20 > 16$ aber: $24 < 25$